

Math. A.
227

Mathesis. Geographia mathem = physica. Pag = 1118.

4^o Math. A. 227.

<36622204870012

<36622204870012

S

F
Bayer. Staatsbibliothek

R

Mathematische Anweisung,
Land - Karten

nach den
G e s e t z e n
der
S p h ä r o i d i k

anzulegen und zu beurtheilen.

V o n

Johann Georg Prändel,

Professor der Mathematik, des Geschäftsstyls und der Naturgeschichte an dem königlichen Edelknabenhause, auch Ehrenmitgliede der königlichen Akademie der Wissenschaften zu München.

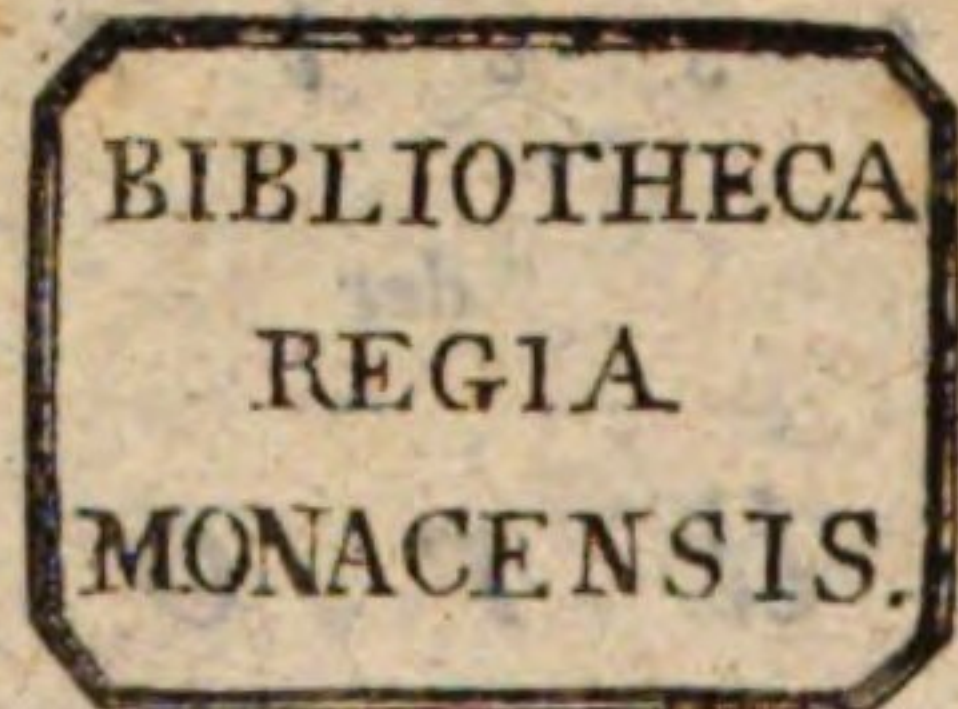
Mit einem Steinabdrucke.

M ü n c h e n

im

Verlage der Lentner'schen Buchhandlung

1 8 1 0.



V o r r e d e.

Zufälliger Weise geriethen im vorigen Jahre ein paar instructive Aufsätze zur Förderung der grossen topographischen Karte des Königreichs Baiern in meine Hände. Sie enthielten mit unter auch ziemlich verwickelte Formeln der Analytik, die die französischen Mathematiker *Bonne*, *Delambre*, *Legendre* und andere ihren geographischen Vermessungen zum Grunde gelegt haben, nachdem sie sich zuvor überzeugt hatten, daß die wahre Gestalt der Erde keine andere, als eine bei den Polen zusammengedrückte Kugel sey. Bekannt mit den liberalen Grundsätzen der baierischen Regierung, wo gegenwärtig jedem Statistiker, Geographen, und Geschichtschreiber der Zutritt zu den ächten Quellen der vaterländischen Urkunden offen steht, wagte es auch ich, diese Formeln zu bearbeiten, sie so viel möglich geschmeidiger zu machen, mancherlei Folgesätze daraus abzuleiten, und die vortheilhafteste logarithmische Berechnung derselben mit Beispielen zu beleuchten. Ich nahm um so weniger Anstand, diese meine Bemühungen drucken zu lassen, da es im mathematischen Fache schlechterdings kein Geheimniß geben kann, und jeder Eingeweihte bei reifem Nachdenken über kurz oder lang von selbst auf die nämlichen Formeln kommen müßte; wenn er sie auch nicht in den Schriften der oben angeführten Franzosen fände. — Bei der Logarithmisirung bemeldter Formeln traf ich

durchgehends die Einrichtung, daß ich nach dem Beispiele des *Herrn Professor Dätzels*, eines unserer größten vaterländischen Mathematiker, und anderer neuerer Analysten, jedem Logarithm eines eigentlichen Bruches ein negatives Kennziffer und eine positive Mantisse gab, um dadurch die sogenannten *hypothetischen* Logarithmen zu verdrängen, und die wahre Ansicht der Logarithmen gebrochener Zahlen mehr empor zu bringen.

Ich glaubte also, durch dieß mein Unternehmen Männern, die sich mit der Verfertigung grosser Landkarten befassen, oder derlei Kunstprodukte richtig beurtheilen wollen, keinen unangenehmen Dienst zu erweisen. Man sieht zugleich hieraus unverkennbar, daß ich keine Gelegenheit unbenützt entweichen lasse, meine mathematischen Kenntnisse zum Besten des Vaterlandes zu verwenden.

MÜNCHEN, den 12. April 1810.

Der Verfasser.

Inhalts - Anzeige

der in diesem

Werkchen abgehandelten Materien.

	Seite
Begriff einer Land-Karte	1
Unterschied zwischen geometrischen und geographischen Karten, oder zwischen Flur- und Land-Karten	1
Ein Umstand, der die Projektion eines bestimmten Theils der Erdoberfläche erschwert	2
Resultate hieraus	3
Hauptentwurf einer Land-Karte	3
Zum Grund gelegte Data aus der neuern mathematischen Geographie	4
Andere hieher gehörige Data und Verhältnisse	5
Ausmittlung der halben kleinen Achse des Erdsphäroids	5
Die Länge eines Breitengrades auf den mittelsten Meridian der Karte zu bestimmen	6
Ein beleuchtendes Beispiel hierüber	7
Eine bequemere Einrichtung der Bonn'schen Formel	9
Grösse des 48sten Breitengrades und jedes andern auf einer Kugel, die die grössere Halbachse des Erdsphäroids zum Halbmesser hat	11
Die nämliche Grösse auf einer Kugel, die das arithmetische Mittel der beiden Halbachsen zum Halbmesser hat	11
Eben diese Grösse auf einer Kugel, die die mittlere Proportionallinie der beiden Halbachsen zum Halbmesser hat	12
Wahre Länge jenes Bogens vom mittlern Meridian auf der neuen topographischen Karte, der zwischen den zwei Parallelkreisen durch 48° und $48^{\circ} 5'$ der geographischen Breite liegt	13

I n h a l t s - A n z e i g e .

	Seite
Die beiläufige Höhe der ganzen topographischen Karte von Baiern auszumitteln	14
Vergleichung der <i>Mannertschen</i> Karte mit der grossen topographischen Karte von Baiern	16
Die Grösse eines Längengrades für jeden gegebenen Parallelkreis in Metres auszumitteln	17
Bequemere Einrichtung der hierher gehörigen Formel	18
Anwendung hierüber	19
Den Halbmesser eines jeden Parallelkreises allgemein zu bestimmen	20
Unterschied der Parallelkreise durch den nämlichen Breitengrad auf Kugeln und Sphäroiden	21
Anwendung	21
Den Projektionshalbmesser eines Parallelkreises auf der Karte für jeden Breitengrad zu berechnen	22
Erforderliche Länge eines Stangenzirkels, um einen Bogen durch den 48sten Grad der Breite auf Baierns neuer Karte zu projektiren	23
Allgemeine Vergleichung des wahren Halbmessers eines Parallelkreises und des Halbmessers seiner Projektirung	23
Resultate hieraus	24
Wie man bei Vergleichung einer grossen Land-Karte den Projektionshalbmesser der Parallelkreise entbehrlich machen könne	25
Eine Bedenklichkeit hierüber und Hebung derselben	25
Ableitung einer Formel, die Tangenten für 5' 10' 15' u. s. f. auf den Parallelkreisen zu berechnen	26
Anwendung	27
Fälle, wo diese Tangenten leichter zu finden sind	28
Unzulänglichkeit solcher Tangenten	29
Eine Methode, den Winkel zu berechnen, den der Projektionshalbmesser mit der Verlängerung des mittelsten Meridians bildet	29
Eine andere allgemeinere Methode oder Formel	31
Ableitung dieser Formel aus Herrn <i>Bonnes</i> Verfahrensmethode	34
Unmittelbare Folgerungen aus dieser Formel	35

I n h a l t s - A n z e i g e.

	Seite
Anwendung derselben	36
Eine andere Anwendung	37
Bestimmung der Tangenten für die Kartennetze	37
Anwendung hierüber	38
Bestimmung der Sekanten	39
Trigonometrische Wege, die Sekanten zu berechnen	40
Anwendung	41
Eine andere noch hieher gehörige Aufgabe	41
Uebergang zu andern nöthigen Berechnungen	44
In wie fern man auf der Erdoberfläche Bögen und Sehnen für gleich groß annehmen dürfe	45
Terrestrische Bögen oder Sehnen, die in Metres gegeben sind, in Minuten zu verwandeln, vorausgesetzt, daß sie noch keinen halben Grad über- steigen	46
Eine kleine Anwendung hierüber	48
Gemeine Auflösung des nämlichen Rechnungsfalls	49
Was man in der mathematischen Geographie unter Azimuth verstehe	50
Aus der geographischen Breite eines Hauptorts, aus der Entfernung eines Nebenorts, und aus dem Azimuthe desselben, die geographische Breite dieses Nebenorts zu bestimmen	50
Bedingungen, unter welchen die aufgestellte Formel stark zusammen fällt	51
Anwendung der aufgestellten Formel	51
Erleichterung dieser Rechnungsweise	54
Vortrag der erzielten Formel in Regeln	56
Eine Anwendung über diese Regeln	58
Eine andere Einrichtung der obigen Formel, die Breite zu berechnen	60
Ein Beispiel zur Anwendung	61
Diese bequeme Einrichtung der Breitenformel läßt sich für die meisten Fälle noch weiter treiben	63
Vortrag dieser Formel in Regeln	64
Ein Beispiel hierüber	66
Auch ein Beispiel, wo das Azimuth zwischen 90° und 270° hineinfällt	67

Inhalts - Anzeige.

	Seite
Stellung der ursprünglichen Breiteformel für den Fall, wenn man die Erde für eine Kugel gelten lassen wollte	68
Einrichtung der sphäroidischen Formel und der daraus abgeleiteten Regeln zur Berechnung der geographischen Breite umliegender Ortschaften für einen andern Hauptpunkt z. B. für Dachau	70
Anwendung hierüber	72
Ein anderer Nutzen der geographischen Azimuthe	73
Eine Anwendung dieser brauchbaren Formel	73
Was muß diese Distanz zwischen Harlaching und Neuhausen auf der Mannertschen Karte betragen? Eine Frage zur Prüfung dieser Karte vorgelegt	76
Bestimmung des Azimuths eines Nebenorts in Bezug auf das Hauptort	77
Anwendung hierüber	78
Ummodelung der Formel zur Bestimmung des Azimuths für den Fall, wenn δ nicht bekannt ist	79
Anwendung	81
Die geographische Länge eines Orts aus dem Azimuthe und aus der Entfernung desselben vom Standpunkte des Beobachters zu bestimmen, vorausgesetzt, daß dessen geographische Breite bekannt ist	82
Eine Anwendung hierüber	83
Ummodelung der Formel für den Fall, wo δ nicht bekannt ist	84
Anwendung dieser kleinen Formel	84
Die Formel so zu stellen, daß die geographische Länge von einer Menge Ortschaften, die um einen Haupt-Stand-Punkt herumliegen, z. B. um München, leicht bestimmt werden kann	85
Anwendung hierüber	86
Aus dem Meilenmaasse einer gegebenen Land-Karte die Verjüngung derselben zu bestimmen	87
Eine Anwendung dieses Verfahrens	88

§. 1.

Begriff einer Landkarte.

Unter einer Karte, wie das Wort hier genommen wird, versteht man bekanntlich die möglich getreueste Darstellung eines Stückes der Erdoberfläche auf einer Ebne im Kleinen, samt den darauf befindlichen Hauptgegenständen.

§. 2.

Unterschied zwischen geometrischen und geographischen Karten, oder zwischen Flur- und Land-Karten.

Eine geometrische Karte oder ein sogenannter *Plan* stellt immer nur ein kleines Stück der Erdoberfläche, zum Beispiel eine Feldmarkung, eine Waldung, oder auch ein einzelnes Grundstück nach den Regeln der Geometrie auf einer Ebne so dar, daß sie ohne merklichen Fehler als eine dem Urbilde vollkommen ähnliche Figur angenommen werden darf.

Bei geographischen Landkarten hat dieß nicht Statt; weil das Stück einer krummen Oberfläche nie vollkommene Aehnlichkeit mit seiner Abbildung auf der Ebne haben kann. Beträchtliche Stücke der Erdoberfläche verstatten keine andere Vorstellung, als wie sie dem Auge nach den Grundsätzen der Perspektive in's Kleine gebracht erscheinen müßten. Man nennt dieß die *stereographische Projektion* eines Theils der Erdoberfläche.

§. 3.

Ein Umstand, der die Projektion eines bestimmten Theils der Erdoberfläche erschwert.

Wenn man sich die Frage aufwirft: Nach welchen Regeln ist die Oberfläche der Erde gekrümmt? oder: welche Figur hat der Erdkörper eigentlich? Ist er ein Doppelkegel, eine Kugel, eine Elliptoide? dann wird die Art und Weise, ein Stück der Erdoberfläche zu projektiren, problematisch. Antwortet man sich nach dem Beispiele der Alten, daß die Erde eine vollkommene Kugel sey; oder nach dem Beispiele der Neuern, daß sie zwar von der Kugelgestalt abweiche, daß man aber diese Abweichung wegen ihrer Geringfügigkeit für nichts halten dürfe *), dann hätte das Geschäft nicht viel Schwierigkeit. Allein man fängt izt an, die Sache ein Bischen genauer zu nehmen. Die Franzosen sind in diesem Stück rühmlich vorangegangen, und es wäre für die Deutschen unverzeihlich, wenn sie hierinfalls zurückbleiben wollten. Es ist auch wirklich schon an dem, daß das Königreich Baiern nach der Theorie der Oberfläche solcher Körper, die aus der Umdrehung einer Ellipse um ihre kleine Achse entstanden sind, in einer grossen topographischen Karte projektirt werde; weil es die mathematisch erwiesene Thatsachen, daß dem Erdkörper diese Figur eigen sey, und daß

*) Selbst Tobias Mayer in seiner vollständigen und gründlichen Anweisung zur Verzeichnung der Landkarten etc. Erlang 1804, sagt noch S. 32. „Man nimmt die Erde für eine vollkommne Kugel an, weil die Abweichung davon zu unmerklich ist, als daß man sie bei Landkarten in Betrachtung ziehen dürfte.“

die beiden Pole näher bei einander liegen, als zwei gegenüberstehende Punkte der Peripherie des Aequators, so und nicht anders erfordern.

§. 4.

Resultate dieser Ansicht.

Daraus geht unvermeidlich hervor, daß der Aequator und alle Kurven, die auf dem Erdsphäroid damit parallel laufen, zwar im strengsten Sinne des Worts Kreise sind; daß aber die Meridiane, das ist, jene Kurven, die ihre Scheitel in den beiden Polen haben, und den Aequator rechtwinklicht durchschneiden, wahre Ellipsen vorstellen, deren grosse Achse der Durchmesser des Aequators, und deren kleine Achse die Verbindungslinie der beiden Pole ist. Die Bogen dieser Kurven, nämlich der Parallelkreise und des Meridians, die durch jenes Land gehen, welches man geographisch entwerfen will, geben das sogenannte *Netz* der Karte.

§. 5.

Hauptentwurf einer Landkarte.

Es stelle Fig. 1. die Linie a c den Meridian des Hauptorts der Karte, z. B. den Meridian der Sternwarte des Landes vor; durch den Punkt a gehe ein mit dem Aequator parallel gezogener Kreis, z. B. durch den 48° der Breite; der Punkt b sey um 5 Minuten von a entfernt, der Punkt c um 10 Minuten u. s. w.; ferner halten die Bögen a 1, 12... b m, m n... 5 Minuten der Länge: so liegen die Tangenten dieser Kreisbögen in den Perpendikulärlinien A B, Z e, $\lambda \mu$ &c.

Es muß nun durch die Analytik bestimmt werden:

a) Mit welchen Halbmessern ap ap' ap'' &c. die Parallelkreise auf der Karte zu projektiren sind; damit sie nach den Gesezen der Sphäroidik und der Perspektive gegen den Pol zu immer verhältnißmässig eine grössere Krümmung erhalten:

b) Welche Grösse die Tangenten Af . aB ... bk , be ... co , cp u. s. w. nach Maaßgabe der Parallelkreise bekommen:

c) Wie groß die Winkel apf , apB ... $ap'k$, $ap'e$... $cp''o$ $cp''w$ &c. seyn müssen, damit sie von den projektirten Parallelkreisen Bögen abschneiden, die die nämliche Länge haben, wie die bei den wahren Parallelkreisen von $5'$, $10'$ $15'$ u. s. w.

d) Wie groß endlich die Sekanten für die eben gefundenen Winkel ausfallen; damit die Ueberschüsse derselben über ihre Halbmesser von den Punkten f , B , dann k , e und so fort, gegen 1 , 2 ... m , n . &c. abgestochen werden können.

§. 6.

Zum Grund gelegte Data aus der neuern mathematischen Geographie.

Zum Projektionsentwurfe der grossen topographischen Karte vom Königreich Baiern, wo die Linien eine 5000fache Verjüngung erhalten, wurden von Herrn *Bonne* folgende Grössen gegeben:

1. Der Halbmesser des Aequators $a=6375737$ Metres, dessen Logarithm 6.8045304 ist.

2. Das Quadrat der Excentrizität (Entfernung eines Brennpunkts des Erdsparoids von dessen Mittelpunkte) $e=0,005979058$.

Der hypothetische Logarithm dieses Quadrats ist 7.7766329, statt dessen ich mich aber lieber des eigentlichen o. 7766329 — 3 bediene.

3. Die Ludolphische Zahl $\pi = 3,141592\dots$ und deren Logarithm o. 4971499.

§. 7.

Andere hieher gehörige Data und Verhältnisse.

Da nach *Brisson* 1 Metre 3,078444 ehemalige Pariserschuhe giebt, so beträgt die Länge der halben grossen Achse des Erdellipsoids 19627349,313... Pariserschuh. Da nach eben diesem Auctor 22803,29 Pariserschuh, zufolge der neuesten Vermessung der Erde durch die Franzosen, eine geographische Meile geben: so hält die grössere Halbachse $860\frac{5}{7}$ geographische oder deutsche Meilen, und eine solche Meile zählt 7407,407... Metres. In baierischen Schuhen misst die grössere Halbachse 21845240; indem 10000 Metres nach der Behauptung des Herrn Legationsrath *Beigels* 34263 baierischen Schuhen gleich sind. Es treffen demnach auf die geographische Meile 25380 baierische Schuhe, welche Angabe auch wirklich bei der gegenwärtigen Steuerrektifikation im Königreiche Baiern zum Grunde gelegt worden.

§. 8.

Ausmittlung der halben kleinen Achse des Erdsphäroids.

Aus den beiden Angaben des grössern Halbmessers der Erde und der Exzentrizität läßt sich leicht ein Schluß auf die Länge der halben kleinen Achse, d. i. auf den Abstand eines Pols vom Mittelpunkte der grossen Achse, machen. Die höhere Geometrie liefert

uns die Formel $b = a \sqrt{1 - e^2}$. Folglich $b = 6375737 \sqrt{1 - 0,005979058}$
 $= 6375737 \sqrt{0,994020942} = 6375737 \times 0,99198 = 6356647$ Metres.
 In Meilen ausgedrückt hält also die kleine halbe Achse $858\frac{1}{7}$. Es ist
 demnach der Unterschied der beiden halben Achsen $860\frac{5}{7} - 858\frac{1}{7} =$
 $2\frac{4}{7}$ geographische Meilen, und die Abplattung beträgt nicht gar $\frac{1}{334}$
 des grössern Halbmessers.

§. 9.

Die Länge eines Breitengrades auf dem mittelsten Meridian der Karte in Metres zu bestimmen.

Herr *Bonne* gab hierzu folgende Formel

$$B^{\circ} = \frac{\frac{1}{2} \pi a}{90} (1 - e^2) \frac{1}{(1 - e^2 \sin.^2 L)^{\frac{3}{2}}},$$

welche ich zu meinem Gebrauche lieber in die einfachere Gestalt zusammenziehe:

$B^{\circ} = \frac{a \pi (1 - e^2)}{180 \sqrt{(1 - e^2 \sin.^2 L)^3}}$, wo L die geographische Breite (Latitudo) oder die Polhöhe, und π bekanntlich die ludolphische Zahl 3,14159..., deren Logarithm, wie schon gesagt worden, 0.4971499 ist, bedeutet. Die übrigen Grössen a und e kennt man aus §. 6.

Wollte man die Erde als eine Kugel betrachten, dann wäre $e = 0$, und die Formel verwandelte sich in diese:

$B^{\circ} = \frac{a \pi}{180}$, wobei ersichtlich ist, daß in diesem Falle alle Grade gleich groß sind, während sie sich auf dem Sphäroid

nach Maßgabe der Breite selbst ändern. Denn für $L=0$, das heißt, auf dem Aequator, ist $B^0 = \frac{a\pi(1-e^2)}{180}$; für $L=30^\circ$ ist $B^0 = \frac{a\pi(1-e^2)}{180\sqrt{\left(\frac{1-e^2}{4}\right)^3}}$
 endlich für $L=90^\circ$ oder am Pol ist $B^0 = \frac{a\pi(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}{180(1-e^2)} = \frac{a\pi}{180\sqrt{1-e^2}}$

§. 10.

Die Behandlung dieser Formel durch ein Beispiel erleuchtet.

Aufgabe.

Welche Länge in Metres hat auf dem mittelsten Meridian der baierischen Karte der 48ste Breitengrad?

$$\text{Formel: } B^0 = \frac{a\pi(1-e^2)}{180\sqrt{(1-e^2 \sin. L)^3}}$$

Berechnung des Zählers.

$$\begin{array}{r} 1 \\ e^2 = 0,005979 \\ \hline 0,994020 \end{array}$$

$$\text{Log. } 0,99402 = 0.9973951 - 1$$

$$\text{Log. } a = 6.8045304$$

$$\text{Log. } \pi = 0.4971499$$

$$\hline 7.2990754$$

Berechnung des Nenners.

$$\text{Log. } e^2 = 0.7766329 - 3$$

$$\text{Log. sin. } 48^\circ = 0.8710735 - 1$$

$$0.8710735 - 1$$

$$\hline 0.5187799 - 3 = \text{Log. } 0,003302.$$

$$\begin{array}{r} \text{I} \\ - 0,003302 \\ \hline 0,996697 \end{array}$$

$$\text{Log. } 0,996697 = 0,9985601 - \text{I}$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ \hline 0,9956803 - \text{I} \end{array}$$

$$\text{Oder auch } \begin{array}{r} 1,9956803 - 2 \\ \hline \end{array}$$

$$: 2 \quad \begin{array}{r} 0,9979401 - \text{I} \end{array}$$

$$\text{Log. } 180 \quad \begin{array}{r} 2,2552725 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2,2531126 \end{array}$$

$$\text{Log. des Zählers} = 7,2990754$$

$$\text{Log. des Nenners} = 2,2531126$$

$$\underline{\hspace{1cm}} \quad 5,0459628 = \text{Log. } 111164 \text{ Metres.}$$

Da nun die Grade auf einer Ellipsoide gegen die beiden Pole, der Abplattung wegen immer grösser werden, so hat man für zweckmässig befunden, diesen Kalkül von 5' zu 5' auf ein neues vorzunehmen; um Resultate zu gewinnen, die der Wahrheit näher kommen. Es trifft demnach für die ersten 5 Minuten der 12te Theil dieses Grades, das heisst

$$\frac{111164}{12} = 9260\frac{3}{4} \text{ Metres.}$$

§. 11.

Eine bequemere Einrichtung der Bonn'schen Formel

$$B^{\circ} = \frac{a\pi(1-e^2)}{180 \sqrt{(1-e^2 \sin.^2 L)^3}}.$$

Bei einer nähern Betrachtung dieses analytischen Ausdruckes fällt also gleich in die Augen, daß er auch so geschrieben werden könne:

$$B^{\circ} = \frac{a\pi(1-e^2)}{180} : (1-e^2 \sin.^2 L)^{\frac{3}{2}}$$

Da nun der Dividend für Kalkuls dieser Art immer der nämliche bleibt, so berechne man ihn ein für allemal, stelle den beständigen Logarithm davon her, und zeige die Subtraktion des Logarithms von $(1-e^2 \sin.^2 L)^{\frac{3}{2}}$ gehörig an, so wird die logarithmisirte Formel so aussehen:

$$\begin{aligned} \text{Log. } B^{\circ} &= 5.0438033 - \frac{3}{2} \text{Log. } (1-e^2 \sin.^2 L) \text{ oder} \\ \text{Log. } B^{\circ} &= 5.0438033 - \frac{3 \text{Log. } (1-e^2 \sin.^2 L)}{2} \end{aligned}$$

B e w e i s.

$$e^2 = \overset{1}{0}, 005979$$

$$0, 994020 = 1 - e^2$$

$$\text{Log. } 0, 99402 = 0.9973955 - 1$$

$$\text{Log. } a = 6.8045304$$

$$\text{Log. } \pi = 0, 4971499$$

$$7.2990758$$

$$\text{Log. } 180 = 2.2552725$$

$$5.0438033 = L. \frac{a\pi(1-e^2)}{180}$$

B

Nun ist $L(1 - e^2 \sin.^2 L)^{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2} L(1 - e^2 \sin.^2 L)$; daher
 $\text{Log. } B^\circ = 5.0438030 - \frac{3}{2} \text{Log. } (1 - e^2 \sin.^2 L)$ oder
 wenn man lieber will

$$\text{Log. } B^\circ = 5.0438033 - \frac{3 \text{Log. } (1 - e^2 \sin.^2 L)}{2}$$

Um sich zu überzeugen, daß man für die geographische Breite von 48° das nämliche Resultat durch diese abgekürzte Formel bezwecke, was zuvor durch die ausführliche Berechnung erzielt worden, soll der kleine Kalkul hier durchgeführt werden.

$$\text{Log. sin. } 48 = 0.8710735 - 1$$

2

$$0.7421470 - 1$$

$$\text{Log. } e^2 = 0.7766329 - 3$$

$$0.5187799 - 3 = \text{Log. } 0.003302$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 0.003302 \end{array}$$

$$0.996697 = (1 - e^2 \sin.^2 L)$$

$$\text{Log. } 0.996697 = 0.9985601 - 1$$

3

$$0.9956803 - 1$$

$$\text{Oder auch: } 1.9956803 - 2$$

$$: 2 \quad 0.9978401 - 1 = \frac{3 L(1 - e^2 \sin.^2 L)}{2}$$

$$5.0438033$$

$$0.9978401 - 1$$

+

$$5.0459632 = \text{Log. } 111164 \text{ Metres.}$$

§. 12.

Grösse des 48sten Breitengrades und jedes andern in Metres auf einer Kugel, die die grössere Halbachse des Erdsphäroids zum Halbmesser hat.

Es darf hier nur die oben §. 9. abgeleitete einfache Formel

$$B^{\circ} = \frac{a\pi}{180} \text{ zum Grunde gelegt werden.}$$

$$\text{Log. } a = 6.8045304$$

$$\text{Log. } \pi = 0.4971499$$

$$7.3016803$$

$$\text{Log. } 180 = 2.2552725$$

$$5.0464078 = \text{Log. } 111277 \text{ Metres.}$$

Der Unterschied für den ganzen 48sten Grad beträgt demnach $111277 - 111164 = 113$ Metres, welches auf 5 Minuten nicht gar $9\frac{1}{2}$ Metres abwirft.

§. 13.

Grösse des 48sten Grades der Breite auf einer Kugel, die das arithmetische Mittel der beiden Halbachsen zum Halbmesser hat.

Die grössere Halbachse wird hier angenommen:

6375737: die kleinere Halbachse

ist nach §. 3.

6356647

2 :

12732384

6366192 das Mittel.

B 2

$$\text{Log. } 6366192 = 6.8038797$$

$$\text{Log. } \pi = 0.4971499$$

$$7.3010296$$

$$\text{Log. } 180 = 2.2552725$$

$$5.0457571 = \text{Log. } \text{IIIIII} \dots$$

Unterschied $\text{IIII}164 - \text{IIIIII} = 53$ Metres. Es erhält sich also das Resultat der Sphäroide in der Mitte der beiden Kugeln, deren eine den grössern Halbmesser der Sphäroide, und die andere das arithmetische Mittel der beiden Halbachsen zum Halbmesser hat.

§. 14.

Grösse des 48sten Breitengrades auf einer Kugel, die die mittlere Proportionallinie der beiden Halbachsen zum Halbmesser hat.

Man berechne diese geometrische Mittelgrösse durch Logarithmen.

$$\text{Log. } 6375737 = 6.8041304$$

$$\text{Log. } 6356647 = 6.8032288$$

$$13.6077592$$

$$: 2 \quad 6.8038796 = \text{Log. } 6366190$$

$$\text{Log. } \pi = 0.4971499$$

$$7.9010295$$

$$\text{Log. } 180 = 2.2552725$$

$$5.0458570 = \text{Log. } \text{IIIIII} \dots$$

woraus hervorgeht, daß es für den 48sten Grad der Breite einerlei ist, ob man die arithmetische oder die geometrische Mittelgrösse der beiden Halb-Achsen zum Halbmesser der Erdkugel nimmt. Auch für jeden andern Breitengrad erscheinen gleiche Resultate, weil der Logarithm der arithmetischen und geometrischen Mittelgrösse der beiden Halbachsen bis auf das 7te Ziffer der Mantisse der nämliche ist.

§. 15.

Wahre Länge des mittlern Meridians auf der neuen topographischen Karte zwischen den zwei Parallelkreisen, die durch 48° und 48° 5' der geographischen Breite gezogen sind, z. B. die Distanz zwischen Harlaching bei München und Oberbiberg.

Obigem Kalkul zufolge beträgt dieser Bogen des mittlern Meridians auf dem Erdsphäroid $9263\frac{3}{4}$ Metres. Da nun nach Herrn Legationsrath *Beigel* der Metre sehr nahe 41 baierische Zoll hält, und da von jedem Metre auf der Erde nur der 50000ste Theil auf die Karte getragen wird; so kann diese Aufgabe durch folgenden kleinen Ansatz gelöst werden.

Baier. Zoll?		$9262\frac{3}{4}$ Metres auf der Karte,
I	I	Metres auf der Erde,
I	80000	
	41 baier. Zoll.	
80000	37088	
4	7411	
: 5	10000	41
	40000	7411
	29644	
	303851	7 Zoll
	40000	
	28	
	23851	
	12	
	47702	
	23851	
	286212	7 Linien.
	40000	

Diese Distanz mißt sohin auf der neuen Karte von Baiern etwas über 7 Zoll und 7 Linien.

§. 16.

Die beiläufige Höhe der ganzen topographischen Karte von Baiern auszumitteln.

Da das Königreich Baiern nach der Mannertschen Karte sich von $45^{\circ} 40'$ bis über $50^{\circ} 25'$ nördlicher Breite erstreckt, sohin die Karte allerwenigstens $4^{\circ} 45'$ Höhe bekommt, und da von $5'$ zu $5'$ Parallelkreise gezogen werden, so treffen für die ganze Karte $285 : 5 = 57$ Parallelkreise. Man rechne nun die Breite des ersten und letzten Parallelstreifs in Metres, und betrachte die ganze Höhe als eine arithmetische Progression von 57 Gliedern, wovon das erste und letzte bekannt sind.

Berechnung der Höhe des ersten Parallelstreifs von $45^{\circ} 40'$ bis $45^{\circ} 45'$ nach der Formel $B^{\circ} = 5,0438003 - \frac{3L(1 - e^2 \sin.^2 L)}{2}$.

$$\text{Log. sin. } 45^{\circ} 40' = 0,8544799 - 1$$

$$\text{Log. } e^2 = \frac{0,7089598 - 1}{0,7766329 - 3}$$

$$0,4855927 - 3 = \text{Log. } 0,003059$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 0,003059 \end{array}$$

$$\hline 0,99694$$

$$\text{Log. } 0,99694 = 0,9986690 - 1$$

3

$$0,9960070 - 1$$

oder:

$$1,9960070 - 2$$

: 2

$$0,9980035 - 1$$

$$\begin{array}{r} 5,0438033 \\ - 0,9980035 - 1 \\ + \end{array}$$

5,0457998 = Log. 111122 Metres; folglich treffen für 5 Minuten $9260\frac{1}{8}$ Metres.

Berechnung der Höhe des letzten Parallelstreifes von $50^\circ 25'$ bis $50^\circ 30'$.

$$\text{Log. sin. } 50^\circ 25' = 0,8868846 - 1$$

2

$$0,7737692 - 1$$

$$\text{Log. } e^2 = 0,7766329 - 3$$

$$0,5504021 - 3 = \text{Log. } 0,00352.$$

1

$$0,003552$$

$$0,996447$$

$$\text{Log. } 0,99644 = 0,9984542 - 1$$

3

$$0,9953626 - 1$$

: 2

$$0,9976813 - 1$$

5. 0438033

0. 9976812 — 1

+

5. 0461220 = Log. 111205 Metres, wo
auf 5' genau $9267\frac{1}{12}$ treffen.

Es wäre also in der Progressionsformel $f = (a+u) \frac{n}{2}$

das $a = 9260\frac{1}{6}$

$u = 9267\frac{1}{12}$

und $n = 57$ daher $f = \left(\frac{9260\frac{1}{6} + 9267\frac{1}{12}}{2} \right) 57 = 528026\frac{5}{8}$
Metres ungefähr.

Man verwandle diese verjüngte Höhe in baierisches Maafs.

B. Zoll?	528026 $\frac{5}{8}$ Metres auf der Karte,
I	$\frac{1}{30000}$ Metres auf der Erde,
I	41 baier. Zoll.

Antw. 433 Zoll oder mehr als 36 baier. Schuh.

§. 17.

Vergleichung der Mannertschen Karte mit der grossen topographischen Karte von Baiern.

Hier ist der Ort, eine Vergleichung dieser beiden Karten in Hinsicht ihrer verschiedenen Grösse anzustellen. Auf der Mannertschen Karte, die noch nach der Theorie der Kugelprojektion entworfen worden, misst ein Breitengrad wie der andere 7 Zoll $6\frac{1}{2}$ Linie, wel-

welches für $4^{\circ} 45'$ genau $429\frac{7}{8}$ Linien beträgt. Wenn man nun annimmt, daß sich diese ganze Höhe durch das Tröcknen nach dem Drucke um $3\frac{1}{8}$ Linien verkürzt habe, so gäbe das in Allem 433 Linien oder $36\frac{1}{2}$ Zoll. Folglich machen $36\frac{1}{2}$ Zoll bei Mannert $36\frac{1}{2}$ Schuh auf der grossen topographischen Karte; woraus hervorgeht, daß *Mannert* einen 12mal kleinern Maßstab genommen, oder mit andern Worten, daß der baierische Schuh in $12 \times 50000 = 600000$ Theile getheilt worden sey. — Wirklich mißt eine Meile auf dem Mannertschen Maßstab $6\frac{1}{2}$ Linie. Wenn man nun mit dieser Grösse in 25380 baierische Schuh, nämlich in die Länge einer geographischen Meile, dividirt, kömmt heraus:

$$25380 \times 12 \times 12 \times 12 : \frac{73}{12} = 3654720 \times \frac{12}{73} = \frac{43856640}{73} = 607758,$$

wo der Ueberschuß theils vom unvermeidlichen Eingehen des Papiers, theils von der unzulänglichen Genauigkeit des Messens herühren mag. Genau genommen hält eine 600000mal verjüngte geographische Meile 6,0912 baierische Linien. Wer ist nun im Stande, diese Länge auf einem auch noch so fein gearbeitetem Maßstabe (Scala) mit dem Handzirkel abzunehmen?

§ 18.

Die Grösse eines Längengrades für jeden gegebenen Parallelkreis in Metres auszumitteln.

Herr *Bonne* bedient sich hierzu der Formel:

$x = \frac{\cos. L}{(1 - e^2 \sin.^2 L)^{\frac{1}{2}}} \times \frac{\frac{1}{2} \pi a}{90}$, welche sich in diese zusammenziehen läßt:

$$x = \frac{a \pi \cos. L}{180 \sqrt{1 - e^2 \sin.^2 L}}.$$

C

Dürfte man die Erde als eine Kugel annehmen, dann wäre $e=0$, und eben darum $x = \frac{a \pi \cos. L}{180}$, wo dann für $L=0$ auf dem Aequator $x = \frac{a \pi}{180}$, und für $L=60$ in der Gegend der Polarzirkel $x = \frac{a \pi}{360}$ hervorgienge.

§. 19.

Diese Formel läßt sich zum Gebrauche geschmeidiger machen.

Man löse sie in die beiden Faktoren auf: $\frac{a \pi}{180} \times \frac{\cos L}{\sqrt{1 - e^2 \sin.^2 L}}$, und suche für den ersten beständigen Faktor den Logarithm, wie oben §. 11, auf folgende Weise:

$$\begin{array}{r}
 \text{Log. } a = 6.8045304 \\
 \text{Log. } \pi = 0.4971499 \\
 \hline
 7.3016803 \\
 \text{Log. } 180 = 2.2552725 \\
 \hline
 5.0464078
 \end{array}$$

und logarithmisire auch den zweiten Faktor, so erscheint ohne weiters: $\text{Log. } L^\circ = 5.0264078 + \text{Log. } \cos. L - \frac{\text{Log. } (1 - e^2 \sin.^2 L)}{2}$

§. 20.

A n w e n d u n g.

Wie groß ist ein Längengrad des Parallelkreises durch den 48sten Grad der Breite in Metres ausgedrückt?

Auflös. Man bestimme allererst das letzte negative Glied.

$$\text{Log. sin. } 48^\circ = 0.8710735 - 1$$

$$0.7421470 - 1$$

$$\text{Log. } e^2 = 0.7766329 - 3$$

$$0.5187799 - 3 = \text{Log. } 0.003302$$

$$1$$

$$- 0.003302$$

$$0.996697$$

$$\text{Log. } 0.996697 = 0.9985632 - 1$$

$$: 2 \quad 0.9992816 - 1$$

$$\text{Log. cos. } 48^\circ = 0.8255109 - 1$$

$$5.0464078$$

$$4.8719187$$

$$0.9992816 - 1$$

$$- \quad +$$

$$4.8726371 = \text{Log. } 74582, 5 \text{ Metres.}$$

§. 21.

Den Halbmesser eines jeden Parallelkreises des Erdsphäroids allgemein zu bestimmen.

Der eigentliche Halbmesser eines mit dem Aequator parallel gezogenen Kreises auf der abgeplatteten Erdkugel läßt sich für jeden Grad der Breite, wo er durchgeht, mittels der allgemeinen Formel berechnen:

$$R = \frac{a \cos. L}{\sqrt{1 - e^2 \sin.^2 L}}$$

B e w e i s.

1. Jeder Längengrad irgend eines Parallelkreises enthält nach §. 18. allgemein $\frac{a \pi \cos L}{180 \sqrt{1 - e^2 \sin.^2 L}}$; folglich beträgt die ganze Peripherie desselben $\frac{360 a \pi \cos. L}{180 \sqrt{1 - e^2 \sin.^2 L}} = \frac{2 a \pi \cos. L}{\sqrt{1 - e^2 \sin.^2 L}}$ Metres.

2. Es ist aber bekanntlich verstattet, aus der Grösse der Peripherie eines Kreises auf die Grösse des Halbmessers zu schliessen, oder sie vielmehr daraus zu berechnen; weil durchgehends,

$$R = \frac{P}{2 \pi} \text{ ist. Daher}$$

$$R = \frac{2 a \pi \cos. L}{2 \pi \sqrt{1 - e^2 \sin.^2 L}} = \frac{a \cos. L}{\sqrt{1 - e^2 \sin.^2 L}} \quad \text{Logarithmisirt hat sie}$$

diese Gestalt:

$$\text{Log. } R = 6.8045304 + \text{Log. } \cos. L - \frac{1}{2} \text{Log. } (1 - e^2 \sin.^2 L)$$

§. 22.

Sind die Parallelkreise der nämlichen Breitengrade bei Kugeln oder bei Sphäroiden grösser?

Im Falle die Erde eine wahre Kugel wäre, die die halbe grosse Achse zum Halbmesser hätte, müßte, wie schon mehrmals erinnert worden, $e = 0$ gesetzt werden, und es gieng hervor: $R = a \cos. L$. Da nun der Divisor $\sqrt{1 - e^2 \sin.^2 L}$ allemal einen eigentlichen Bruch vorstellt, und da solche Divisionen Quotienten liefern, die grösser als die Dividenden sind, so folgt daraus, daß die Halbmesser auf Sphäroiden grösser als Kugeln sind.

§. 23.

Anwendung.

Welche Länge hat der eigentliche Halbmesser des Parallelkreises durch den 48sten Grad der Breite?

Auflös. Man verfähre nach der oben aufgestellten Formel:

$$\text{Log. } R = 6.8045304 + \text{Log. } \cos. L - \frac{1}{2} \text{Log. } (1 - e^2 \sin.^2 L)$$

$$\text{Log. } \cos. L = 0.8255109 - 1$$

$$6.8045304$$

$$6.6300413$$

$$\frac{1}{2} \text{Log. } (1 - e^2 \sin.^2 L) = 0.9992816 - 1 \text{ nach §. 13.}$$

$$- \quad +$$

$$6.6307597 = \text{Log. } 4273261 \text{ Metres.}$$

Da für die Kugel $e = 0$ ist, so dürfte für diese Annahme von der Summe der beiden Logarithmen a und $\cos. L$ nichts mehr ab-

gezogen werden, und die entsprechende Zahl wäre 4266200 Metres. Es beträgt demnach der Unterschied $4273261 - 4266200 = 7061$ Metres.

§. 24.

Den Halbmesser zur Projektirung eines solchen Parallelkreises auf der Karte für jeden Breitengrad zu berechnen.

Um dieß zu bewerkstelligen stellt Herr *Bonne* die kurze Formel auf:

$$R' = \frac{a \cotang L}{\sqrt{(1 - e^2 \sin.^2 L)}}$$
, woraus für die Kugel hervorgehe: $R' = a \cotang L$.

Logarithmisirt hat die Formel für das Erdsphäroid folgendes Aussehen:

$$\text{Log. } R' = 6.8045304 + \text{Log. } \cotang L - \frac{1}{2} \text{Log. } (1 - e^2 \sin.^2 L)$$

§. 25.

A n w e n d u n g.

Welche Länge müßte der Halbmesser in Metres haben, um auf der neuen topographischen Karte von Baiern den Parallelkreis durch 48° Breite zu projektiren?

Auflös. 6.8045304

$$\text{Log. } \cotang 48^\circ = 0.9544374 - 1$$

$$\frac{1}{2} \text{Log. } (1 - e^2 \sin.^2 L) = 6.7589678$$

$$0.9992816 - 1, \text{ nach §.}$$

$$\begin{array}{r} - \\ + \\ \hline \end{array}$$

$$6.7596862 = \text{Log. } 5750244 \text{ Metres.}$$

§. 26.

Erforderliche Länge eines Stangenzirkels, einen Bogen dieses Parallelkreises auf der neuen Karte Baierns zu projektiren.

Man darf hier nichts weiter thun, als die 5750244 Metres in baierische Schuhe verwandeln, und den 5000sten Theil der Verjüngung wegen, nehmen. Es geben aber nach Herrn Legationsrath Beigel 10000 Metres genau 34263 baierische Schuhe. Daher die Regel Detri:

Metres geben	baierische Schuh;	was Metres?
10000	34263	= 5750244 : x.
Log. 5750244	= 6. 7596862	
Log. 34263	= 4. 5348254	
	11. 2945116	
Log. 10000	= 4.	
	7. 2945116	= Log. 19702600 baier. Schuh.

⁴² ~~19702600~~ 5580000		394 baierische Schuh, die erforderliche Länge eines Stangenzirkels.
---	--	---

Er müfste also um 34 Schuh länger seyn, als die hiesige Frauenkirche oder als die Höhe eines Frauenthurms.

§. 27.

Allgemeine Vergleichung des wahren Halbmessers eines Parallelkreises und des Halbmessers seiner Projektirung.

Aus der Gegeneinanderhaltung der beiden analytischen Formeln, die zur Berechnung dieser Halbmesser so eben aufgestellt

worden, ergibt sich allgemein, daß sich bei jedem Parallelkreise der wahre Halbmesser zum Projektirungshalbmesser verhält, wie der Cosinus der Breite zur Cotangente derselben.

$$\text{Denn } R = \frac{a \cos L}{\sqrt{(1-e^2 \sin.^2 L)}}$$

$$\text{und } R' = \frac{a \cotang L}{\sqrt{(1-e^2 \sin.^2 L)}}. \text{ In Proportion gestellt:}$$

$$R; R' = \frac{a \cos L}{\sqrt{1-e^2 \sin.^2 L}} : \frac{a \cotang. L}{\sqrt{1-e^2 \sin.^2 L}}$$

Multipliziert man nun die beiden letzten Glieder durch $\sqrt{(1-e^2 \sin.^2 L)}$ und dividirt sie durch a , so geht unvermeidlich hervor:

$$R; R' = \cos. L : \cotang L.$$

§. 28.

Resultate hieraus.

Für $L = 0^\circ$ wird der eigentliche Halbmesser des Aequators $= a$, und der Halbmesser seiner Projektion $= \infty$. Daher die gerade Linie, welche auf Karten und auf Planiglobien den Aequator vorstellt. Für $L = 90^\circ$ verschwinden sie beide. Je mehr sich also ein Parallelkreis dem Pole nähert, desto weniger sind seine beiden Halbmesser an Länge von einander unterschieden.

§. 29.

Wie man bei Verzeichnung einer grossen Landkarte die Projektionshalbmesser der Parallelkreise entbehrlich machen könne.

Da es wegen der ausserordentlichen Grösse nicht wohl möglich ist, einen Parallelkreis mittels eines Stangenzirkels auf der Karte, z. B. auf der von Baiern, zu projektiren, so berechne man von 5' zu 5' die Tangenten und auch die Sekanten, ziehe die Halbmesser von den letztern ab, und schneide diese Ueberschüsse von den Sekanten hinweg, so bekömmst man Punkte, die durch Linien verbunden, die Parallelkreise oder vielmehr die Bögen derselben geben müssen.

§. 30.

Eine Bedenklichkeit hierüber, und Hebung derselben.

Aber wie können die Ueberschüsse auf den Sekanten abgeschnitten werden, wenn man diese Sekanten wegen Grösse des Halbmessers auf der Karte selbst nicht zu zeichnen vermag? Man sollte ja wenigst die Richtung haben, mit der eine solche Sekante von seiner Tangente hinweg geht: oder mit andern Worten, es muß der Winkel bekannt seyn, welche Tangente und Sekante miteinander machen. — Hier ist bald Rath geschafft. Sind einmal die Punkte auf dem mittelsten Meridian der Karte bestimmt, wodurch die Parallelkreise von 5' zu 5' gezogen werden müssen; so führe man Querlinien durch diese Punkte unter einen rechten Winkel hindurch. Alle Tangenten der Bögen von 5', 10', 15', u. s. f. liegen in diesen Linien. Man berechne diese Tangenten mittels einer eigenen hiezu gehörigen Formel, die in der Folge abgeleitet

werden soll, und trage sie links und rechts, vom mittelsten Meridian aus, auf. Die Verbindungs-Linien zwei und zwei solcher Abschnittspunkte von einer Querlinie zur andern geben die verlangten Richtungen der Sekanten ab, welche alle zusammen die in etwas gekrümmten Meridians vorstellen. Es lassen sich also die berechneten Ueberschüsse leicht von ihren Tangenten aus abschneiden; und diese letztern Abschnittspunkte endlich geben in ihrer Verbindung die projektirten Bögen der Parallelkreise, ohne eben den ungeheuren Projektirungs-Halbmesser nöthig zu haben.

§. 31.

Ableitung einer Formel, wodurch die Tangenten von 5' 10' 15' und so weiter für die eigentlichen Parallelkreise berechnet werden.

Wenn n' die Anzahl der Minuten eines Parallelkreises bedeutet, so hat die Formel, wodurch die Tangenten für n' in Metres bestimmt werden sollen, folgende Gestalt:

$$\text{Tang.} = \frac{a \cos L \tan n'}{\sqrt{1 - e^2 \sin.^2 L}}$$

B e w e i s.

Es stelle Fig. 2. $a c$ den Halbmesser eines Parallelkreises vor. Der Winkel halte 5' oder 10', überhaupt n' , so ist $a f$ dessen Tangente. Es gilt nun in dem $\triangle a c f$ die Proportion:

$$a f : a c = \sin. c : \sin. f$$

$$\text{substit. Tang: } \frac{a \cos L}{\sqrt{1 - e^2 \sin.^2 L}} = \sin. n' : \cos. n' \\ : \cos. n'$$

$$\text{Tang: } \frac{a \cos. L}{V_{1-e^2 \sin.^2 L}} = \frac{\sin. n'}{\cos. n'} : 1$$

$$\text{Das ist: Tang: } \frac{a \cos. L}{V_{1-e^2 \sin.^2 L}} = \text{tang. } n : 1$$

$$\text{Und endlich Tang. in Metres} = \frac{a \cos. L \text{ tang. } n'}{V_{1-e^2 \sin.^2 L}}.$$

§. 32.

Anwendung.

Es soll die Tangente für 5' des letzten Parallelkreises für das Königreich Baiern durch 50° 25' Breite berechnet werden.

Auflös.

Berechnung des Nenners.

$$\text{Log. } 50^\circ 25' = 0.8868846 - 1$$

$$\text{Log. } e^2 = \begin{array}{r} 0.7737692 - 1 \\ 0.7766329 - 3 \end{array}$$

$$0.5504021 - 3 = \text{Log. } 0.0035512.$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ - 0.0035514 \\ \hline 0.9964485 \end{array}$$

$$\text{Log. } 0.996449 = 0.9984551 - 1$$

$$: 2 \quad 0.9992275 - 1 \quad \text{C}$$

D 2

Berechnung des Zäblers.

$$\begin{array}{r}
 \text{Log. } a = 6.8045304 \\
 \text{Log. cos. } 50^\circ 25' = 0.8042757 - 1 \\
 \text{Log. tang. } 5' = 0.1629964 - 3 \\
 \hline
 3.7718025 \\
 \text{Davon abgezogen } \mathcal{C} = 0.9992275 - 1 \\
 \hline
 3.7725750 = \text{Log. } 5919,36 \text{ Metres.}
 \end{array}$$

§. 33.

Fälle, wo diese Tangenten leichter zu finden sind.

Ist gähling der eigentliche Halbmesser des Parallelkreises, für dessen Bogen von $5' 10' 15'$ u. s. f. die Tangente bestimmt werden soll, schon nach der Formel $R = \frac{a \cos. L}{\sqrt{1-e^2 \sin.^2 L}}$ berechnet worden, dann darf derselbe bloß noch mit der Tangente von n' multipliziert werden. Ich führe als ein hieher gehöriges Beispiel die Berechnung der Tangente für $5'$ des Parallelkreises durch den 48sten Grad der Breite an, weil der Halbmesser hievon schon §. 22. berechnet und 4273261 Metres groß befunden worden.

$$\begin{array}{r}
 \text{Log. } 4273261 = 6.6307597 \\
 \text{Log. tang. } 5' = 0.1629964 - 3 \\
 \hline
 3.7937561 = \text{Log. } 6219 \frac{1}{2} \text{ Metres.}
 \end{array}$$

Für Tangenten von $5'$ und $10'$ dürfen gar nur die berechneten Längengrade durch 12 und 6 dividirt werden; weil solche kleine

Bögen mit ihren Tangenten beinahe überein's fallen. So z. B. ist oben §. 20. die Grösse eines Längengrades vom Parallelkreise durch den 48° der Breite auf 745825 Metres berechnet worden, folglich misst ein Bogen von $5'$ den 12ten Theil desselben, nämlich $\frac{74582,5}{12} = 6215,2$ Metres, wo der Unterschied nur 4,3 Metres beträgt.

§. 35.

Unzulänglichkeit der so eben gefundenen Tangenten.

Allein diese Tangenten können zur Herstellung des Netzes einer in's Grosse gehenden Karte nicht wohl gebraucht werden; weil sie den Projektirungshalbmessern, die namhaft grösser als die eigentlichen Halbmesser der Parallelkreise auf dem verjüngten Erdsphäroid sind, nicht entsprechen. Um nun die hieher gehörigen Tangenten und Sekanten zu berechnen, ist vor allem nothwendig, daß man die Winkel kennt, welche der jedesmalige Projektionshalbmesser mit seiner Sekante bildet, um von dem projektirten Kreisbogen genau so viel Metres abschneiden zu können, als $5'$ $10'$ $15'$ und so weiter auf dem eigentlichen Parallelkreise betragen. Daß diese Winkel merklich kleiner ausfallen, als die innerhalb des Erdsphäroids, braucht nicht erst erwiesen zu werden.

§. 36.

Eine Methode, diesen Winkel in jedem Falle wirklich zu berechnen.

Herr *Bonne* trägt das praktische Verfahren, die projektirten Winkel zu bestimmen in dem analytischen Ausdrucke vor:

$p^\circ = 57,2957 \frac{a f}{a p}$, wo Fig. 1. das $a p$ offenbar den Projektionshalbmesser, und $a f$ die Tangente des projektirten Bogens bedeutet. Allein diese Tangente kennt man ja noch nicht; dieß ist ja eben die Linie, um die sichs handelt: es muß also, denke ich, $a r$ statt $a f$ heißen, das sich auch leicht erweisen liesse. Und zudem befindet sich selbst in Tobias Mayers Anweisung zur Verzeichnung der Landkarten §. 36. VIII. 2. ein ähnlicher Ausdruck: $\omega = 57,2957 \frac{\mu}{\rho}$, wo μ oder §. 35. V. wo das $P W$ offenbar einen Bogen bezeichnet. Ich halte demnach das $a f$ für einen Schreibfehler, und lese obige Formel so:

$$W^\circ = 57,2957 \frac{a r}{a p}.$$

Es bedeutet nun $a r$ den projektirten Bogen, und $a p$ den Projektionshalbmesser, beide in Metres gegeben, wobei vorausgesetzt wird, daß man sie schon zuvor durch Rechnung gefunden habe. Der Bogen $a r$ ist bekanntlich ein aliquoter Theil des Längengrades für eine gegebene Breite, zu dessen Berechnung §§. 19. u. 20. Formeln aufgestellt worden. Eben so hat man auch §. 21. eine ähnliche Formel gegeben, um für jede Breite den Projektionshalbmesser zu bestimmen. — Gesetzt, man wollte den Winkel finden, den zwei Projektionshalbmesser einschliessen, um auf den projektirten Parallelkreisbogen durch 48° Breite so viel Metres abzuschneiden, als $5'$ auf dem wahren Parallelkreisbogen abwerfen. Hier ist $a r$ der 12te Theil eines Längengrades, welcher für 48° Breite $\frac{74582}{12} = 6215,33 \dots$ Metres beträgt, und der Projektions-

halbmesser mißt für eben diese Breite 5720244 Metres gemäß dem Kalkul §. 25.

R e c h n u n g.

$$\text{Log. } 57,2957 = 1.7581220$$

$$\text{Log. } 6215,30 \dots = 3.7934712$$

$$5.5515932$$

$$\text{Log. } 575024 = 6.7596862$$

$$0.7919070 - 2 = \text{Log. } 0^{\circ}, 06193 \dots$$

$$0^{\circ}, 06193$$

$$60$$

$$3|71580$$

$$60$$

$$42|94800$$

$$\text{Also } w = 0^{\circ}. 3'. 42'', 9.$$

§. 37.

Eine andere sehr natürliche Methode, die Winkel zu bestimmen, die die projektirten Halbmesser mit der Verlängerung des mittlern Meridians bilden, um Bögen von 5' 10' 15' u. s. f. auf den Parallelkreisen abzuschneiden.

1. In jedem Kreise hält ein Bogen, der so lang als der Halbmesser ist, 57,2957... Grade, gemäß der Regel Detri

Durchmesser geben Grad, was Durchmesser?

3,14...

360

$\frac{1}{2}$

$$\text{Antw. } \frac{180}{3,14} = 57,2957 \text{ Grad.}$$

2. Nun mißt z. B. der Halbmesser des projektirten Parallelkreises durch den 48° der Breite nach §. 25. sehr genau 5750244 Metres. Ich möchte nun wissen, wie viel Grade in eben diesem Kreise auf einen Bogen treffen, der so groß ist, als $5'$ des eigentlichen Parallelkreises durch den 48sten Grad der Breite ausmachen: denn dieß ist das Maas des verlangten Winkels. Es halten aber nach der Berechnung von §. 20. 5 Minuten $\frac{74582}{12} = 6215$ Metres.

Folgende Regel Detri giebt hierüber die beste Auskunft:

Metres	Grad	Metres
5750244	57,2957...	6215

Logarithmische Behandlung.

$$\text{Log. } 57,2957 = 1.7581220$$

$$\text{Log. } 6215 = 3.7934411$$

$$5.5515631$$

$$\text{Log. } 5750244 = 6.7596862$$

$$0.7918769 - 2 = \text{Log. } 0,061926 \text{ Grad.}$$

3. Man mache diesen Dezimalbruch zu Minuten und Sekunden.

$$\begin{array}{r} 0,061926 \\ \quad 60 \\ \hline 3 \overline{) 715560} \\ \quad 60 \\ \hline 42 \overline{) 93360} \end{array}$$

Also $w = 0^\circ, 3', 42'', 9 \dots$ wie oben.

§. 38.

Erhebung dieser natürlichen Methode zur Allgemeinheit in einer sehr einfachen Formel.

Da der Projektionshalbmesser den allgemeinen Ausdruck hat:
 $\frac{a \cot. L}{\sqrt{1-e^2 \sin.^2 L}}$, da ferner die Zahl $57,2957 \dots$ Grade durch den Bruch
 $\frac{180}{\pi}$ vorgestellt werden kann, und da die Länge eines Grades für

jeden Parallelkreis durch die Formel gegeben ist: $\frac{a \pi \cos. L}{180 \cdot \sqrt{1-e^2 \sin.^2 L}}$,

folglich dieselbe für n' sich dahin abändert: $\frac{n' a \pi \cos. L}{60 \cdot 180 \cdot \sqrt{1-e^2 \sin.^2 L}}$;

so geht der obige zweite Regel-Detri-Ansatz in diese allgemeine Form über:

Metres	Grad	Metres
$a \cot. L$	$\frac{180}{\pi}$	$n' a \pi \cos. L$
$\sqrt{1-e^2 \sin.^2 L}$	π	$60 \cdot 180 \cdot \sqrt{1-e^2 \sin.^2 L}$

$$\text{Folglich } W^\circ = \frac{180}{\pi} \times \frac{n' a \pi \cos. L}{60 \cdot 180 \sqrt{1-e^2 \sin.^2 L}} \times \frac{\sqrt{1-e^2 \sin.^2 L}}{a \cot. L} =$$

$$\frac{n' \cos. L}{60 \cot. L}. \text{ Weil aber bekanntlich } \frac{\cos. L}{\cot. L} = \sin. L, \text{ so ist in}$$

$$\text{der größten Allgemeinheit } W^\circ = \frac{n' \sin. L}{60}.$$

§. 39.

Die Ableitung der nämlichen einfachen Formel aus Herrn Bonne's Verfahrensmethode selbst.

In dem oben angeregten Bonneschen Ausdrucke $W^{\circ} = 57,2957 \frac{a}{p}$ ist der beständige Koeffizient bekanntlich nichts anders als der aufgelöste Bruch $\frac{180^{\circ}}{3,14159} = \frac{180^{\circ}}{\pi}$. Ferner läßt sich der Bogen a für $5'$, $10'$, $15'$ u. d. gl. durch folgende Regel Detri allgemein in Metres geben:

Minuten	Metres	Minuten
60	$\frac{a \pi \cos. L}{180 \sqrt{1 - e^2 \sin.^2 L}}$	$2'$
<i>Antw.</i> $\frac{n' a \pi \cos. L}{60 \cdot 180 \sqrt{1 - e^2 \sin.^2 L}}$ Metres.		

Endlich ist der Projektionshalbmesser $a p = \frac{a \cot. L}{\sqrt{1 - e^2 \sin.^2 L}}$; folglich kann für die beiden Faktoren und für den Nenner $a p$ so substituirt werden:

$$\begin{aligned}
 W^{\circ} &= \frac{180}{\pi} \times \frac{n' a \pi \cos. L}{60 \cdot 180 \sqrt{1 - e^2 \sin.^2 L}} \times \frac{\sqrt{1 - e^2 \sin.^2 L}}{a \cot. L} \\
 &= \frac{n' \cos. L}{60 \cot. L} \text{ und weil, wie schon oben gesagt worden,} \\
 \frac{\cos. L}{\cotang. L} &= \sin. L \text{ ist, so erscheint } W^{\circ} = \frac{n' \sin. L}{60}.
 \end{aligned}$$

§. 40.

Unmittelbare Folgerungen aus dieser neuen Formel.

1. Für $L = 90^\circ$ ist $W^\circ = \frac{n'}{60}$. Z. B. wenn $n' = 5'$ wäre, so ist auch $W = 5'$, das heisst: der Winkel entspricht genau dem Bogen, dem er zugehört. Da aber der Projektionshalbmesser und der Halbmesser des Parallelkreises unter dieser Voraussetzung beide $= 0$ werden, so müssen sich hier alle Meridiane in ihrem Pole vereinigen.

2. Für $L = 0$ ist auch $W = 0$, das will sagen: Der Winkel, den zwei Projektionshalbmesser mit einander machen, ist unendlich spitzig; folglich müssen die Projektionshalbmesser ins Unendliche verlängert werden, das heisst, sie laufen unter sich parallel, und die beiden andern Winkel auf dem Aequator sind rechte Winkel.

3. Ist $L = 30^\circ$, dann wird $W = \frac{\frac{1}{2}n'}{60}$. Mit Worten ausgedrückt spricht sich dieß Ereigniß so aus: Der Winkel, den beide Projektionshalbmesser einschliessen, ist genau halb so groß als der Zentriwinkel des eigentlichen Parallelkreises, von n Minuten. Will man z. B. vom Parallelkreis durch 30° Breite 5 Minuten abschneiden, so hält der projektirte Bogen, oder der Winkel zwischen den beiden Projektionshalbmessern, $2\frac{1}{2}$ Minuten.

 §. 41.

Anwendung.

Man will auf dem Parallelkreise durch $48^{\circ} 15'$ einen Bogen von $20'$ vom mittelsten Meridian an gerechnet, abschneiden; welchen Winkel erfordert er zwischen den beiden Projektionshalbmessern; oder mit andern Worten: welche Grösse muss der projektirte Bogen haben?

Auflös. Man substituire in $W^{\circ} = \frac{n' \sin. L}{60}$ gehörig, so erscheint:

$$W^{\circ} = \frac{20 \sin. 48^{\circ} 15'}{60} = \frac{\sin. 48^{\circ} 15'}{3}.$$

$$\text{Log. sin. } 48^{\circ} 15' = 0.8727722 - 1$$

$$\text{Log. } 3 = 0.4771213$$

$$0.3956509 - 1 = \text{Log. } 0^{\circ}, 24864$$

Zu Minuten und Sekunden gemacht:

$$0,24864$$

$$60.$$

$$\hline 14|91840$$

$$60$$

$$\hline 55|10400$$

Es ist demnach $W = 0^{\circ} 14' 55''$.

§. 42.

Noch eine Anwendung.

Welchen Winkel bilden die beiden äussersten Projektionshalbmesser für das Königreich Baiern, wenn man annimmt, dass links und rechts 2 Grad vom Parallelkreise durch $45^{\circ} 45'$ abgeschnitten werden müssen?

Aufl. Hier ist $n' = 120$, und $L = 45^{\circ} 45'$

$$\text{Daher } W^{\circ} = \frac{120 \sin. 45^{\circ} 45'}{60} = 2 \sin. 45^{\circ} 45'$$

$$\text{Log. sin. } 45^{\circ} 45' = 0.8550961 - 1$$

$$\text{Log. } 2 = 0.3010300$$

$$0.1561261 = 1^{\circ}, 4326$$

$$\begin{array}{r} 4326 \\ 60 \\ \hline 25|9560 \\ 60 \\ \hline 57|3600 \\ 1^{\circ} \quad 25' \quad 57'' \\ \hline 2^{\circ} \quad 51' \quad 54'' = \end{array}$$

§. 43.

Bestimmung der Tangenten für die Kartennetze.

Nachdem nun die Winkel, welche der verlängerte Mittelmeridian mit dem Projektionshalbmesser bildet, nach der eben

aufgestellten kurzen Formel gefunden worden, so ist man bereits in Stand gesetzt, die erforderlichen Tangenten von 5 zu 5 Minuten für jeden Parallelkreis zu berechnen. Es hat Fig. 1, die Proportion statt:

$$af: ap = \sin. p. \sin. f.$$

$$\text{substit. Tang. : } R' = \sin. W : \cos. W.$$

$$\text{Tang. : } R' = \frac{\sin. W}{\cos. W} : 1 \quad ; \cos. W$$

$$\text{Aber } \frac{\sin. W}{\cos. W} = \text{tang. } W$$

$$\text{substit. Tang. : } R' = \text{tang. } W : 1$$

$$\text{und Tangente} = R' \text{ tang. } W.$$

Das heisst, es darf nur der Projektionshalbmesser mit der Tangente des berechneten Winkels multipliziert werden,

§. 44.

A n w e n d u n g.

Welche Tangentenlänge fodern 5' des Parallelkreises durch den 48sten Breitengrad in der neuen baierischen Karte?

Auflös.

$$\text{Log. } R' = 6.7596862$$

$$\text{Log. tang. } 0^\circ. 3'. 42'' 9 = 0.0334892 - 3 \text{ nach §. 36.}$$

$$3.7931754 = \text{Log. } 6211 \text{ Metres.}$$

*) *Anmerk.* Ist allenfalls der Projektionshalbmesser nicht bekannt, dann muß statt R' die Formel $\frac{a \cotang. L}{\sqrt{(1-e^2 \sin.^2 L)}}$ substituiert werden, und es geht hervor:

$$\text{Tang.} = \frac{a \cotang. L \text{ tang. } W}{\sqrt{(1-e^2 \sin.^2 L)}}$$

§. 45.

Bestimmung der Sekanten.

Noch sind die Sekanten zu berechnen übrig und zwar gleichfalls nach Maafsgabe des Projektionshalbmessers. Man hat hiezu dreierlei Wege, einen geometrischen und zwei trigonometrische. Ersterer wäre zwar der einfachste und sicherste; aber auch der mühsamste. Denn es bilden bekanntlich Halbmesser, Tangente und Sekante eines Bogens ein rechtwinklichtes Dreieck, wo der Halbmesser und die Tangente die Lothen (Catheti) und die Sekante die Hypothenuse vorstellt. Kann man nun voraussetzen, daß man den Halbmesser des projektirten Parallelkreises, so wie auch die Tangente schon berechnet habe, dann darf nur der pythagorische Lehrsatz: $\text{Sec.} = \sqrt{R^2 + \text{Tang.}^2}$ angewendet werden. Für 48° Breite und φ' des Parallelkreises ist: $\text{Sec.} = \sqrt{5750244^2 + 6211^2} = \sqrt{33065306059536 + 38576521} = \sqrt{33065344636057} = 5750247,3$ Metres.

Es ist demnach der Ueberschuß der Sekante über ihren Halbmesser 3, 3 Metres.

§. 46.

Trigonometrische Wege die Sekanten zu berechnen.

Wenn man Fig. 1. das Dreyeck $a p f$, welches der Projektionshalbmesser, die Tangente von n' und die dazu gehörige Sekante bildet, noch einmal vor sich nimmt, so gehen die zwei Proportionen hervor;

$$\text{I. } p f : a f = \sin. 90 : \sin. p.$$

$$\text{substit. Secant.: Tang.} = 1 : \sin. W.$$

$$\text{Sec.} = \frac{\text{Tang.}}{\sin. W}$$

$$\text{II. } p f : a p = \sin. 90 : \sin. f.$$

$$\text{subst. Sec.: } R' = 1 : \cos. W.$$

$$\text{Sec.} = \frac{R'}{\cos. W}.$$

Allein die erste Formel setzt voraus, daß man die Tangente sowohl als den Winkel W aufs genaueste berechnet habe. Eine Terze zuviel oder zu wenig giebt schon mehrere Metres Unterschied. Weit sicherer führt der zweite Weg: $\text{Sec.} = \frac{R'}{\cos. W}$, oder im Fall der Projektionshalbmesser nicht bekannt wäre:

$$\text{Sec.} = \frac{a \cot. L}{\cos. W \sqrt{1 - e^2 \sin.^2 L}}.$$

§. 47.

 §. 47.

A n w e n d u n g.

Wie groß ist die Sekante für 5' des Parallelkreises durch 48° Breite?

Auflös. Man setze $W = 3', 43''$ und $R = 5750244$ Metres, daher

$$\begin{array}{r}
 \text{Log. } R = 6.7596862 \\
 \text{Log. cos. } W = 0.9999998 - 1 \\
 \hline
 \phantom{\text{Log. cos. } W = 0.9999998 - 1} + \\
 \hline
 6.7596864 = \text{Log. } 5750247 \text{ Metres.}
 \end{array}$$

Der Ueberschuß dieser Sekante über den Projektionshalbmesser wäre demnach wie oben 3 Metres.

§. 48.

Eine andere noch hieher gehörige Aufgabe.

Welche Länge bekommt wohl die neue topographische Karte von Baiern, da dieses Königreich ungefähr zwischen dem 27° und 31° der geographischen Länge liegt?

Auflös. Die größte Ausdehnung der Karte Baierns von West gegen Ost beträgt also volle 4 Längengrade, so daß 2° links und 2° rechts des mittelsten Meridians der Karte zu liegen kommen.

1. Man berechne also vor allen den Winkel, welchen der Projektionshalbmesser vom Parallelkreise durch den 45° 35' der Breite (denn so weit erstreckt sich das südliche Tyrol) mit der

Verlängerung des Mittelmeridians bildet, um 2 projektirte Längengrade abzuschneiden.

Dazu dient die Formel $W^{\circ} = \frac{n' \sin. L}{60}$, wo $n' = 120'$ und $L = 45^{\circ} 35'$ bedeutet. Daher

$$x^{\circ} = \frac{120 \sin. 45^{\circ} 35'}{60} = 2 \sin. 45^{\circ} 35'$$

$$\text{Log. sin. } L = 0.8538619 - I$$

$$\text{Log. } 2 = 0.3010300$$

$$0.1548919 = \text{Log. } 1^{\circ}, 4284$$

60

25|7040

60

42|2400

$$\text{Folglich } W = 1^{\circ}. 25'. 42''.$$

2. Nun bestimme man auch den Projektionshalbmesser für den Parallelkreis durch $45^{\circ} 35'$ Breite nach der Formel:

$$R' = \frac{a \cot. L}{\sqrt{1-e^2 \sin.^2 L}}.$$

$$\text{Log. sin. } 45^{\circ} 35' = 0.8538619 - I$$

2

$$0.7077238 - I$$

$$\text{Log. } e^2 = 0.7766339 - 3$$

$$0.4843567 - 3 = \text{Log. } 0,0030504.$$

$$\begin{array}{r}
 1 \\
 - 6,0030504 \\
 \hline
 0,9969495
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
 \text{Log. } 0,996949 & = & 0,9986732 - 1 \\
 : 2 & & 0,9993366 - 1
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
 \text{Log. } a & = & 6,8045304 \\
 \text{Log. cot. } 45^\circ 35' & = & 0,9911562 - 1 \\
 \hline
 & & 6,7956866 \\
 \text{Log. } \sqrt{1-e^2 \sin.^2 L} & = & 0,9993366 - 1 \\
 - & & + \\
 \hline
 & & 6,7963500 = \text{Log. } 6256767 \text{ Metres.}
 \end{array}$$

3. Ferner berechne man die Projektionstangente nach der Formel: $\text{Tang.} = R' \text{ tang. } W$.

$$\begin{array}{rcl}
 \text{Log. } R' & = & 6,7963500 \\
 \text{Log. tang. } W & = & 0,3967969 - 2 \\
 \hline
 & & 0,1931461 = \text{Log. } 156004 \text{ Metres.}
 \end{array}$$

4. Diese Länge setze man in baierisches Maafs um nach der Reesischen Regel:

Zoll Baierische?	156004 Metres auf der Karte
1	$\frac{1}{50000}$ Metres auf der Erdoberfläche
1	41 baierische Zoll.

$$\text{Log. } 156004 = 5. 1931461$$

$$\text{Log. } 41 = 1. 6127839$$

$$6. 8059300$$

$$\text{Log. } 50000 = 4. 6989700$$

$$2. 1069600 = \text{Log. } 128$$

2

256 Zoll oder 21 Sch.

4 Zoll ist die Länge der neuen Karte von Baiern. Da nun die Höhe dieser neuen Karte nach §. 16. 36 Schuh und 1 Zoll beträgt, so verhält sich die Höhe zur Länge sehr nahe wie 5: 3, welches Verhältniß auch die Mannertsche Karte so ziemlich beobachtet.

§. 49.

Uebergang zu andern nöthigen Berechnungen.

Nun ist man durch die bisherigen Resultate in Stand gesetzt, sowohl die Meridiane, als auch die Parallelkreise von 5' zu 5' auf der Karte aufzutragen. Noch übrig die Eintragung der Ortschaften nach ihrer wahren geographischen Lage auf dem Erdsphäroid. Dazu werden vor allem die geographischen Längen und Breiten derselben erfordert. Von einigen Plätzen des Landes, z. B. von Sternwarten, Hauptstädten, trigonometrischen Anhaltspunkten u. d. gl. sind sie zwar schon bekannt, und dürfen nur in guten Tafeln nachgeschlagen werden: für die übrigen Ortschaften hingegen ist man gezwungen, sie entweder durch wirkliche astronomische Beobachtungen zu bestimmen, oder sie durch andere mathematische Kunstgriffe auszumitteln. Leztere Methode soll nun in der Folge gelehrt werden.

§. 50.

In wie ferne man auf der Erdoberfläche Bögen und Sehnen für gleich groß annehmen dürfe.

Bögen von $\frac{1}{2}$ Grad oder $7\frac{1}{2}$ geographische Meilen unterscheiden sich auf der Erdoberfläche noch kaum um 0,18 Metres, das ist: um $7\frac{1}{2}$ baierische Zolle von ihren Sehnen.

B e w e i s.

1. Weil bei dieser Untersuchung nicht viel darauf ankömmt, ob die Erde eine Kugel oder eine Elliptoide sey, und weil im leztern Falle die Kalkuls allzuverwickelt ausfallen, so nehme ich der Leichtigkeit wegen die Erde für eine Kugel an, die zu ihrem Halbmesser das arithmetische Mittel beider Halbachsen hat.

$$\begin{array}{r} \frac{1}{2} A = 6375737 \\ \frac{1}{2} a = 6356647 \\ \hline 12732384 \\ : 2 \qquad 6366192 = R. \end{array}$$

2. Es werde sowohl die Länge des Bogens von 30' nach der bekannten Formel: $\text{Arc.} = \frac{n' r \pi}{180.60}$, als auch die Länge der Sehne nach der trigonometrischen Regel: $\text{Chorda} = 2 r \sin. \frac{1}{2} n'$ berechnet, Dieß giebt Unterschied:

$$D = R \left\{ \frac{30 \pi}{10800} - 2 \sin. 15' \right\} = R \left\{ \frac{\pi}{360} - 2 \sin. 15' \right\}.$$

$$\text{Log. } \pi = 0.4971499$$

$$\text{Log. } 360 = 2.5564025$$

$$\hline 0.9408474 - 3 = \text{Log. } 0.008726646... = \mathfrak{C}$$

$$\text{Log. sin. } 15' = 0.6398160 - 3$$

$$\text{Log. } 2 = 0.3010300$$

$$0.9408460 - 3 = \text{Log. } 0.008726618 = \odot$$

$$\odot = 0.008726646$$

$$\odot = 0.008726618$$

$$0.000000028$$

$$\text{Log. } 0.000000028 = 0.4471580 - 8$$

$$\text{Log. } 6366192 = 6.8038798$$

$$0.2510378 - 1 = \text{Log. } 0.1782... \text{ Metres.}$$

§. 51.

Terrestrische Bögen oder Sehnen, die in Metres gegeben sind, in Minuten zu verwandeln, vorausgesetzt, dass sie noch keinen halben Grad übersteigen.

Weil, wie so eben erwiesen worden ist, auf dem Erdsphäroid Bögen und Sehnen, die noch nicht 30 Minuten oder $\frac{1}{2}$ Grad ausmachen, einen unmerklichen Unterschied geben, so haben die beiden französischen Mathematiker *Delambre* und *Legendre* die bequeme Formel aufgestellt:

$$s' = \frac{k \left(1 - \frac{1}{2} e^2 \sin.^2 L \right)}{a \sin. 1'};$$

um jede in Metres gegebne Sehne von besagter Eigenschaft in Minuten umzuschaffen. Es gilt k die Anzahl von Metres, die so ein

gegebner Bogen oder Sehne mißt, e stellt die Exzentrizität, L die geographische Breite des Hauptpunkts und a den Halbmesser des Aequators vor.

Wäre die Erde eine wahre Kugel, und kein Ellipsoid, dann würde, wie schon öfter erinnert worden, $e = 0$ seyn, und obige Formel schwände sehr natürlich in diese zusammen: $\delta' = \frac{k}{a \sin. i'}$;

Indeß kann man bei der eigentlichen Formel doch den Vorthail anbringen, daß man den Nenner $a \sin. i'$, als ein Produkt von zwei beständigen Faktoren, ein für allemal berechnet, und den Logarithm desselben als Minuend anhängt.

Es ist aber $\text{Log. } a = 6.8045304$

und $\text{Log. } \sin. i' = \frac{0.4637261 - 4}{9.2682565}.$

Die logarithmisirte Formel hätte dann diese Gestalt:

$\text{Log. } \delta' = \text{Log. } k + \text{Log. } (1 - \frac{1}{2} e^2 \sin.^2 L) - 3.2682565,$
oder wenn man lieber will: $= \text{Log. } k + \text{Log. } (1 - \frac{1}{2} e^2 \sin.^2 L)$
 $+ 0.7317435 - 4.$

Liegen viele zu berechnende Punkte um einen Hauptpunkt herum, so lohnt es der Mühe, auch den Logarithm von $(1 - \frac{1}{2} \sin.^2 L)$ ein für allemal in die Formel einzuführen, und ihn mit dem Minuend zu verschmelzen. Für München z. B., wo $L = 48^\circ. 8'. 20''.$ ist, gäbe es folgenden kleinen Kalkul:

$\text{Log. } \sin. L = \frac{0.8720191 - 1}{2}$

$0.7440382 - 1$

$\text{Log. } e^2 = \frac{0.7766329 - 3}{2}$

$0.5206711 - 3 = \text{Log. } 0.0033167 \dots$

Von dieser Zahl ist die Hälfte 0,0016584

$$\begin{array}{r} 1 \\ - 0,0016584 \\ \hline \end{array}$$

$$0,9983415$$

$$\text{Log. } 0,9992791 - 1$$

$$+ 0,7317435 - 4$$

$$\hline 0,7310226 - 4.$$

Die logarithmisirte Formel für alle Punkte um München heisst demnach so:

$$\text{Log. } \delta' = \text{Log. } k + 0,7310226 - 4.$$

§. 52.

Eine kleine Anwendung hierüber.

Wie viele Minuten hält die von Herrn Bonne gemessene Basis zwischen München und Aufkirchen bei Erding, die 21649 Metres lang befunden worden.

$$\text{Auflös. } \text{Log. } k = 4,3354378$$

$$+ 0,7310226 - 4$$

$$\hline 1,0664604 = \text{Log. } 11,6536$$

60

$$\text{Antw. } 11' 39'',216.$$

$$\hline 39|2160$$

§. 53.

§. 53.

Gemeine Auflösung dieses Rechnungsfalls.

Nimmt man die Erde nach dem Beispiele der Alten als eine Kugel an, und giebt ihr die halbe grosse Achse zum Halbmesser

dann ist $\delta' = \frac{k}{a \cdot \sin. 1'}$; oder $\text{Log. } \delta' = \text{Log. } k - 3. 2682565$.

Wir wollen sehen, um wie viel sich das Resultat ändert.

$$\text{Log. } k = 4. 3354378$$

$$- 3. 2682365$$

$$1. 0671813 = \text{Log. } 11', 673$$

60

40'' | 380

Antw. 11', 40'', 38. Es beträgt also der Unterschied etwas über 1 Sekunde.

Wollte man allenfalls nach *Klügel* statt der grössern Halbachse die mittlere geometrische Proportionallinie zwischen beiden Halbachsen zum Halbmesser nehmen, welche nach §. 14. 6366190 Metres beträgt, so gäbe es folgendes Resultat:

$$\text{Log. } a = 6. 8038796$$

$$\text{Log. } \sin. 1' = 0. 4637261 - 4$$

$$3. 2676057$$

$$\text{Log. } k = 4. 3354378$$

$$- 3. 2676057$$

$$1. 0678321 = \text{Log. } 11', 6904$$

60

41'' | 4240

Antw. 11', 41'', 424. welches also über 2 Sekunden Abweichung betrüge.

§. 54.

Was man in der mathematischen Geographie unter Azimuth verstehe.

Jener Bogen des Horizonts, der, von irgend einem Standpunkt aus beobachtet, zwischen Süd und einem benachbarten Orte liegt, so daß die Grade von Süd nach West, Nord u. s. f. gezählt werden, heißt im geographischen Sinne das Azimuth eben desselben benachbarten Orts, in Bezug auf den Standpunkt der Beobachtung. — Mit andern Worten ist nach der ältern Geographie das Azimuth jener Winkel, den ein durch zwei Ortschaften gelegter größter Kreis auf der Erdkugel mit dem Meridian jener Ortschaft macht, wo sich der Beobachter befindet. So z. B. macht die Linie zwischen *Neubausen* und *München* einen Winkel von $119^{\circ} 1' 49''$ mit dem Meridian von *München*. Es ist also $119^{\circ} 1' 49''$ das Azimuth von *Neubausen* aus *München* beobachtet.

§. 55.

Aus der geographischen Breite eines Hauptorts, aus der Entfernung eines Nebenorts und aus dem Azimuth desselben, die geographische Breite dieses Nebenorts zu bestimmen.

Wird die gegebne geographische Breite des Hauptorts, z. B. von *München*, durch L , die gesuchte geographische Breite des Nebenorts, z. B. von *Untersending* durch L , die Entfernung oder Distanz dieses Nebenorts vom Hauptorte in Minuten durch δ , und das Azimuth desselben durch z ausgedrückt, so gilt die Formel

$L' = L - (\delta \cos. z + 0,5 \delta \sin. \delta \sin.^2 z \text{ tang. } L) (1 - e^2 \cos.^2 L)$, wobei zu bemerken kömmt, daß δ immer unter oder wenigst nicht viel über 30' bedeuten dürfe. — Die mühsame Ableitung dieser verwickelten Formel ist in: „Methodes analytiques pour la détermination d'un arc du Meridien, par I. B. J. Delambre, à Paris,“ nachzusehen.

§. 56.

Bedingungen, unter welchen die aufgestellte Formel stark zusammen fällt.

Wäre die Erde kein Sphäroid, sondern eine wahre Kugel, dann fiel der letzte eingeklammerte Faktor von selbst hinweg; weil $e=0$ gesetzt werden müßte. Man hätte dann nur mehr $L' = L - (\delta \cos. z + \frac{1}{2} \delta \sin. \delta \sin.^2 z \text{ tang. } L)$. Wenn ferner der benachbarte Ort in dem nämlichen Meridian läge, und zwar gegen Süden, dann wäre das Azimuth $z=0$, und die Formel kürzte sich bis auf dem kleinen Ausdrucke $L' = L - \delta$ ab; das heißt, man dürfte die Minuten der Entfernung nur von der gegebenen Breite abziehen. Befände sich hingegen der benachbarte Ort im nämlichen Meridian nordwärts, dann wäre $z=180$, und $\cos. z = -1$; folglich $L' = L + \delta$: d. i. man müßte in diesem Falle die Minuten der Entfernung zu der gegebenen Breite hinzu addiren.

§. 57.

Anwendung der aufgestellten Formel.

Das Dorf Hohenschäftlarn ist von München 18584 Metres entfernt, und hat zum Azimuth $29^\circ 2'$; was ist seine geographische Breite L , da die Breite von München $48^\circ 8' 20''$ beträgt?

Auflös. 1. Man suche vor allen δ nach der Formel:

$$\text{Log. } \delta = L k + 0,7310227 - 4$$

$$\text{Log. } k = \text{Log. } 18584 = 4.2691392$$

$$0.7310227 - 4$$

$$1.0001619 = \text{Log. } 10,00371$$

60

$$0,22260$$

Es ist demnach $\delta = 10', 0'', 2226$.

2. Nun berechne man von der Formel: $L = L - (\delta \cos. z + 0,5 \delta \sin. \delta \sin.^2 z \text{ tang. } L) (1 + e^2 \cos.^2 L)$, die Parthie $\delta \cos. z$, dann die andere Parthie $0,5 \delta \sin. \delta \sin.^2 z \text{ tang. } L$, und addire ihre Werthe zusammen, so hat man den Werth des ersten eingeklammerten Faktors. Es gilt aber hier $z = 29^\circ 2'$ und $L = 48^\circ 8' 20''$.

E r s t e P a r t h i e.

$$\text{Log. } \delta = 1.0001619$$

$$\text{Log. } \cos. z = 0.9416791 - 1$$

$$0.9418410 = \text{Log. } 8,74662... \text{ C}$$

Z w e i t e P a r t h i e.

$$\text{Log. } \sin. z = 0.6860267 - 1$$

2

$$0.3720534 - 1 = \text{Log. } \sin.^2 z.$$

$$\text{Log. } 0,5 = 0.6989700 - 1$$

$$\text{Log. } \delta = 1.0001619$$

$$\text{Log. } \sin. \delta = 0.4637255 - 3$$

$$\text{Log. } \sin.^2 z = 0.3720534 - 1$$

$$\text{Log. } \text{tang. } L = 0.0476802$$

$$0.5825910 - 3 = \text{Log. } 0,0038246... \text{ O}$$

Addition der beiden Werthe.

$$\textcircled{C} = 8,74662 \dots$$

$$\textcircled{O} = 0,00382 \dots$$

8,75044. Werth der ersten Einklammerung.

3. Endlich berechne man auch den zweiten Faktor $(1 + e^2 \cos.^2 L)$.

$$\text{Log. } \cos. L = 0,8243388 - 1$$

2

$$0,6486776 - 1$$

$$\text{Log. } e^2 = 0,7766329 - 3$$

$$0,4253105 - 3 = \text{Log. } 0,0026626.$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ + 0,00266 \end{array}$$

1,00266, Werth der zweiten Einklammerung.

4. Diese beiden Werthe multiplizire man logarithmisch, so erhält man das, was von Münchens geographischer Breite abgezogen werden muß, um die Breite von Hohenschäftlarn zu bekommen.

$$\text{Log. } 8,75044 = 0,9420299$$

$$\text{Log. } 1,00266 = 0,0011537$$

$$0,9431836 = \text{Log. } 8',77372$$

Und den Dezimalbruch in Sekunden aufgelöset,

$$0,77372$$

60

$$46''|42320$$

Es beträgt demnach das Produkt der beiden eingeklammerten Faktoren

$$0^{\circ} \ 8' \ 46'',423 \dots$$

5. Diefs von L abgezogen:

$$\begin{array}{r} L = ' \ 48^{\circ} \ 8' \ 20'' \\ \quad \quad \quad 0^{\circ} \ 8' \ 46'' \ 4 \dots \\ \hline \end{array}$$

$L' = 47^{\circ} \ 59' \ 33'', 5$, die gesuchte geographische Breite von Hohenschäftlarn,

§. 58.

Erleichterung dieser Rechnungsweise.

Bei Berechnung der geographischen Breite eines benachbarten Orts mittels der Formel:

$L' = L - (\delta \cos. z + 0,5 \delta \sin. \delta \sin.^2 z \text{ tang. } L) (1 + e^2 \cos.^2 L)$
läßt sich noch mancher Vortheil, manche Abkürzung anbringen.

Es ist fürs Erste aus der Trigonometrie bekannt, daß die Sinusse solcher Bögen, die noch nicht 30' halten, an Länge mit ihren Bogen beinahe überein kommen. Selbst der Bogen von 30' ist noch kaum einen millionten Theil des Halbmessers von seinem Sinus unterschieden. Wie unbedeutend muß erst diese Differenz bei Bögen von einigen wenigen Minuten seyn! Nun wird vorausgesetzt, daß δ in der Formel nie mehr als 30' bedeuten könne; folglich darf der Sinus von δ immerhin dem Bogen δ ; in Radiustheilchen gegeben, gleichgesetzt werden. Man drückt aber einen Bogen in Radiustheilchen aus, wenn man die Anzahl der Minuten

desselben mit π (der Ludolphine) multipliziert, und das Produkt durch die Zahl 10800 dividirt, zufolge des Kettensatzes:

Halbm. ?	n'
60'	1°
360°	3,14159 ... Durchm.
1	2 Halbmesser.

$$\text{Antw. } \frac{n' \times 3,14 \dots}{10800}$$

Setzt man nun statt der Zahl 3,14... das gewöhnliche π , so ist jede in Minuten gegebne Bogen dem Bruche gleich $\frac{n' \pi}{10800}$.

Es ist demnach verstattet, in der Formel statt $\sin. \delta$ den Faktor $\frac{\delta \pi}{10800}$ einzuführen. Dieser Auswechslung gemäß würde das zweite Glied zwischen den ersten Klammern so heissen müssen:

$$+ \frac{0,5 \pi \delta^2 \sin.^2 z \text{ tang. } L}{1080} = \frac{\pi}{21600} \delta^2 \sin.^2 z \text{ tang. } L.$$

Da sich nun der gebrochene Faktor $\frac{\pi}{21600}$ ein für allemal logarithmisiren läßt, nach Ausweis folgender kleinen Rechnung:

$$\begin{aligned} \text{Log. } \pi &= 0,4971499 \\ \text{Log. } 21600 &= 4,3344538 \end{aligned}$$

0,1626961 — 4,
so erhält das zweite Glied der Formel folgende Gestalt:

$$12 (\text{Log. } \delta \times \text{Log. sin. } z) + \text{Log. tang. } L + 0.162691 - 4.$$

Da nun die Logarithmisirung des ersten Gliedes der Haupt-Formel nichts weiter giebt als $\text{Log. } \delta \text{ Log. cos. } z$, so läßt sich die Minutenzahl, welche nach Maaßgabe des Azimuths entweder von der geographischen Breite des Standpunkts abgezogen, oder zu ihr addirt werden soll, so vorstellen:

$$L. \left\{ N \left\{ \begin{array}{l} \text{Log. } \delta \\ \text{Log. cos. } z \end{array} \right\} + N \left\{ \begin{array}{l} \text{Log. } \delta \\ \text{Log. sin. } z \\ \text{Log. tang. } L \\ + 0.1626961 - 4 \end{array} \right\} \right\} + \text{Log. } (1 + e^2 \cos.^2 L),$$

wo N die Zahlen (Numeri) bedeuten, welche den zwei eingeklammerten Logarithmensummen entsprechen. Folgende Stellung, wo die zwei Logarithmenparthien verwechselt dastehen, taugt zur wirklichen Berechnung in gewisser Hinsicht besser.

$$L. \left\{ N \left\{ \begin{array}{l} \text{Log. } \delta \\ \text{Log. sin. } z \\ \text{Log. tang. } L \\ + 0.1626961 - 4 \end{array} \right\} + N \left\{ \begin{array}{l} \text{Log. } \delta \\ \text{Log. cos. } z \end{array} \right\} \right\} + \text{Log. } (1 + e^2 \cos.^2 L).$$

§. 59.

Vortrag dieser Formel in Regeln.

I. Man berechne vor allen den Logarithm von δ und den von $(1 + e^2 \cos.^2 L)$. Gut wird es seyn, wenn man sich auf ein Stückchen Papier die beiden Logarithmen ein für allemal aufschreibt: $\text{Log. } e^2 = 0.7766329 - 3$ und $\text{Log. } \frac{1}{2} e^2 = 0.4756029 - 3$. Da ferner bei Berechnung des δ der Logarithm sin, L und bei Berechnung des

des Log. $(1 + e^2 \cos.^2 L)$ der $\cos. L$ aufgeschlagen werden muß, so notire man sich gelegentlich auch den Log. tang. L heraus.

II. Man schreibe den Log. δ zweimal nebeneinander hin.

III. Links setze man Log. sin. z . und rechts Log. cos. z darunter. Hierin liegt der Grund, warum die beiden eingeklammerten Parthien verwechselt worden.

IV. Man addire beiderseits, und duplire die Summe linker Hand.

V. Zur doppelten Summe linker Hand addire man noch den oben herausnotirten Log. tang. L und o. 1626961 — 4.

VI. Für die Logarithmen-Summen links und rechts schreibe man ihre Zahlen aus den Tafeln heraus, addire sie algebraisch nach Maafsgabe des $\cos. z$ (denn ist $z > 90^\circ$ und $< 270^\circ$, so ist die Zahl, die der Logarithmen-Parthie rechter Hand entspricht, negativ) und suche die Logarithmen ihrer Summe auf.

VII. Man addire hinzu den schon berechneten Logarithm der Grösse $(1 + e^2 \cos.^2 L)$ und schlage die dieser Logarithmen-Summe entsprechende Zahl auf, die die verlangten Minuten ausdrückt.

VIII. Ist die algebraische Zahlensumme von VI negativ, so wird natürlich auch diese Minutenzahl negativ seyn. Sie muß also in diesem Falle zu der geographischen Breite des Standpunkts addirt werden.

§. 60.

Eine Anwendung über diese Regeln.

Die Ortschaft Aufkirchen am Würmsee ist von Hohenschäftlarn entfernt 7804,2 Metres, und hat von diesem Standpunkt aus zum Azimuth 45° , $48'$, $5''9$. Welche Breite muß diesem Punkte in der Karte zukommen, da laut Rechnung §. 57. die Breite des Standpunkts Hohenschäftlarn 47° , $59'$, $33''5$ beträgt?

Auflös. 1. Man berechne vor allen den Log. von δ nach der Formel $L \delta = L k + L (1 - e^2 \sin.^2 L) + 0.7317435 - 4$; dann auch den Logarithm von $(1 + e^2 \cos.^2 L)$ und notire sich gelegentlich den Log. tang. L heraus.

$$\begin{array}{r} \text{Log. tang. L} = 0,0454355 \\ + 128 \\ \hline \end{array}$$

$$0,0454483$$

$$\begin{array}{r} \text{Log. sin. L} = 0.8710166 - 1 \\ + 66 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0.8710232 - 1 \\ 2 \\ \hline \end{array}$$

$$0.6420464 - 1$$

$$\text{Log. } \frac{1}{2} e^2 = 0.4756029 - 3$$

$$0.1176593 - 3$$

$$\begin{array}{r} \text{Log. cos. L} = 0.8255810 - 1 \\ + 81 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0.8255891 - 1 \\ 2 \\ \hline \end{array}$$

$$0.6511782 - 1$$

$$\text{Log. } e^2 = 0.7766329 - 3$$

$$0.4278111 - 3$$

$$\begin{array}{r} \text{I} \\ = \text{Log. } 0,0013 \text{ III} \\ \hline 0,9986888 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{I} \\ = \text{Log. } 0,002678 \\ \hline 1,002678 \end{array}$$

$$\text{Log. } 1,00268 = 0,0011623 = \text{Log. } (1 + e^2 \cos.^2 L).$$

$$\text{Log. } 0,998689 = 0,9994303 - \text{I}$$

$$\text{Log. } k = 3,8923284$$

$$+ 0,7317435 - 4$$

$$\hline 0,6235022 = \text{Log. } \delta'$$

2. Man befolge die Regeln von II. bis VII.

Links.

$$\text{Log. } \delta = 0,6235022$$

$$\text{Log. sin. } z = 0,9321586 - \text{I}$$

$$\hline 0,5556608$$

2

$$\hline 1,1113216$$

$$\text{Log. tang. } L = 0,0454483$$

$$+ 0,1626961 - 4$$

$$\hline 0,3194660 - 3$$

$$= \text{Log. } 0,002086.$$

Rechts.

$$\text{Log. } \delta = 0,6235022$$

$$\text{Log. cos. } z, 0,7143729 - \text{I}$$

$$\hline 0,3378751$$

$$= \text{Log. } 2,17708$$

3. Nun sind die Regeln VII. und VIII. in Anwendung zu bringen:

$$+ 0,00209$$

$$+ 2,17708$$

$$\hline 2,18017$$

H 2

$$\begin{array}{r} \text{Log. } 2, 18017 = 0,3384904 \\ + 0,0011623 \\ \hline \end{array}$$

$$0,3396527 = \text{Log. } 2',18601$$

$$\begin{array}{r} 60 \\ \hline 11'' | 16060 \end{array}$$

Es sind demnach abzuziehen:

$$2' \quad 11'', \quad 16$$

$$\begin{array}{r} \text{Daher} \quad 47^\circ \quad 59' \quad 33'',5 \\ \quad \quad \quad 2 \quad \quad 11,16 \\ \hline \end{array}$$

$$47^\circ \quad 57' \quad 22'',33 \quad \text{Breite von Aufkirchen am Würmsee.}$$

§. 61.

Eine andere Einrichtung der obigen Formel, die Breite zu berechnen.

Will man das δ' für irgend eine Distanz nicht im Voraus berechnen, das heißt, will man den terrestrischen Bogen zwischen dem Standpunkte und der benachbarten Ortschaft nicht in Minuten auswerfen; dann kann in der so eben aufgestellten Formel statt $\text{Log. } \delta$ das Aequivalent $\text{Log. } k + \text{Log. } (1 - \frac{1}{2} e^2 \sin.^2 L) + 0,7317435 - 4$ aus §. 60. aufgenommen werden. Daraus geht hervor:

$$L. \left\{ N \left\{ \begin{array}{l} 2 \left\{ \begin{array}{l} \text{Log. } k \\ \text{Log. } \sin. z. \\ \text{Log. } (1 - \frac{1}{2} e^2 \sin.^2 L) \\ + 0,7317435 - 4. \end{array} \right\} \right. \right. \\ \left. \left. \begin{array}{l} + \text{Log. } \tan g. L \\ + 0,1626961 - 4. \end{array} \right\} \right\} + N \left\{ \begin{array}{l} \text{Log. } k \\ \text{Log. } \cos. z \\ \text{Log. } (1 - \frac{1}{2} e^2 \sin.^2 L) \\ + 0,7317435 - 4. \end{array} \right\} \right\} + \text{Log. } \cos.^2 L \\ (1 - e^2 \cos.^2 L)$$

Wird nun der doppelte Logarithm $0.7317435 - 4 = 0.4634870 - 7$ mit dem untersten Logarithm der Einklammerung linker Hand $0.1626961 - 4$ durch Addition verschmolzen, dann erscheint:

$$\text{Log.} \left\{ N \left\{ \begin{array}{l} \text{Log. } k \\ \text{Log. } (1 - \frac{1}{2} e^2 \sin.^2 L) \\ \text{Log. } \sin. z. \\ + \text{tang. } L \\ + 0.6261831 - 11, \end{array} \right\} \right\} + N \left\{ \begin{array}{l} \text{Log. } k \\ \text{Log. } (1 - \frac{1}{2} e^2 \sin.^2 L) \\ \text{Log. } \cos. z \\ + 0.7317435 - 4. \end{array} \right\} \left. \vphantom{\left\{ N \right\}} \right\} \text{Log.}^2 (1 + e^2 \cos.^2 L),$$

wo obige Regeln mit kleinen Abänderungen wieder anwendbar sind.

§. 62.

Ein Beispiel zur Anwendung.

Planeck ist von München 10631,9 Metres entfernt, und hat, von München aus beobachtet, zum Azimuth $70^\circ. 0'. 40''$.

Wie groß ist die geographische Breite dieser Ortschaft?

Die Breite von München zählt bekanntlich $48^\circ. 8'. 20''$

Auflös. Man berechne wieder vor Allem die Logarithmen von $(1 - \frac{1}{2} e^2 \sin.^2 L)$ und $(1 + e^2 \cos.^2 L)$ und notire sich zugleich den Log. tang. L heraus.

$$\text{Log. tang. } L = 0.0476802.$$

$$\begin{array}{r} \text{Log. sin. } L = 0.8720191 - 1 \\ \hline 2 \end{array} \quad \begin{array}{r} \text{Log. cos. } L = 0.8243388 - 1 \\ \hline 2 \end{array}$$

$$0.7440382 - 1$$

$$0.6486776 - 1$$

$$\text{Log. } \frac{1}{2} e^2 = 0.4756029 - 3$$

$$\text{Log. } e^2 = 0.7766329 - 3$$

$$0.2196411 - 3$$

$$0.4253105 - 3$$

$$= \text{Log. } 0,001658 \quad = \text{Log. } 0,002662$$

$$\text{Log. } 0,998341 = 0,9992789 - 1 \quad \text{Log. } 1,002662$$

$$= 0,0011536$$

I. oder links.

$$\text{Log. } k = 4,0264048$$

$$\text{Log. } (1 - \frac{1}{2} e^2 \sin.^2 L) = 0,9992789 - 1$$

$$\text{Log. } \sin. z = 0,9730165 - 1$$

$$3,9987002$$

2

$$7,9974004$$

$$\text{Log. } \text{tang. } L = 0,0476802$$

$$+ 0,6261831 - 11$$

$$0,6712637 - 3$$

$$= \text{Log. } 0,004699 \text{ oder } \text{Log. } 0,0047$$

II. oder rechts.

$$\text{Log. } k = 4,0264048$$

$$\text{Log. } (1 - \frac{1}{2} e^2 \sin. L) = 0,9992789 - 1$$

$$\text{Log. } \cos. z = 0,5338202 - 1$$

$$+ 0,7317435 - 4$$

$$0,5512474$$

$$= \text{Log. } 1,95221$$

$$1,95221$$

$$0,0047$$

$$1,95691$$

$$\begin{array}{r} \text{Log. } 1,95691 = 0.2915708 \\ + 0.0011536 \\ \hline \end{array}$$

$$0.2927244 = \text{Log. } 1',962$$

60

57''|720

$$\begin{array}{r} 48^\circ. \quad 8'. \quad 20'' \\ - \quad \quad 1'. \quad 57'',7 \\ \hline \end{array}$$

$$48^\circ. \quad 6'. \quad 22'',3 \text{ Breite von Planeck.}$$

§. 63.

Diese bequeme Einrichtung der Breitenformel lässt sich für die meisten Fälle noch weiter treiben.

Liegen mehrere Ortschaften um einen Standpunkt herum, wie sich dieß beinahe immer fügt, dann verschmilzt die erste Einklammerung sehr stark, und der letzte Logarithm wird zur beständigen Grösse. So ist z. B. für eine Menge Oerter, deren Entfernungen und Azimuthe sich von München aus bestimmen lässt, gemäß obiger Berechnung ein für allemal

$2 \text{ Log. } (1 - \frac{1}{2}e^2 \sin.^2 L) = 2 \times 0.9992789 - 1 = 0.9985578 - 1$,
dann $\text{Log. tang. } L = 0.0476802$ und $\text{Log. } (1 + e^2 \cos.^2 L) = 0.0011536$. Dieß giebt dann folgende 2 Abkürzungen:

$$0.9985578 - 1$$

$$0.9992789 - 1$$

$$0.0476802$$

$$0.7317435 - 4$$

$$0.6261831 - 11$$

$$0.7310224 - 4$$

$$0.6724211 - 11$$

Daher

$$L. \left\{ N \left\{ \begin{array}{l} \text{Log. } k \\ \text{Log. sin. } z \end{array} \right\} \right. \left. \begin{array}{l} + 0.6724211 - 11 \\ + 0.7310224 - 4 \end{array} \right\} + N \left\{ \begin{array}{l} \text{Log. } k \\ \text{Log. cos. } z \end{array} \right\} \right\} + 0.0011536.$$

§. 64.

Vortrag dieser Formel in Regeln.

Das ganze Rechnungsgeschäft zur Bestimmung der geographischen Breite aller um *München* herumliegenden Ortschaften kann demnach unter folgende 7 einfache Regeln gebracht werden:

I. Man schreibe den Logarithm der Entfernung der befraglichen Ortschaft zweimal neben einander hin.

II. Links setze man den Sinus und rechts den Cosinus des Azimuths darunter.

III. Die beiden Logarithmen linker Hand werden in eine Summe gebracht, und dieselbe doppelt genommen.

IV. Unter die doppelte Summe stelle man den beständigen Logarithm 0.6724211 — 11., und unter die zwei andern Logarithmen rechter Hand 0.7310224 — 4.

V. Man addire beiderseits, und schreibe die den Logarithmen-Summen entsprechende Zahlen heraus. Für $< 90^\circ$ und $> 270^\circ$ ist die Zahl rechter Hand positiv, für $z = 90^\circ$ und $= 270^\circ$ ist sie Null, dann für $z. > 90^\circ$ und < 270 erscheint sie negativ.

VI. Nachdem diese beiden Zahlen nach algebraischen Gesetzen zusammen addirt worden, schreibt man den der Summe entsprechende

sprechenden Logarithm aus den Tafeln heraus, und addirt 0.0011536 dazu.

VII. Die Logarithmen-Summe wird nun wieder in den Tafeln nachgeschlagen, und die Zahl herausgeschrieben. Sie zeigt Minuten an, und ist positiv, in so ferne die obige Zahlensumme (VI.) positiv war; im widrigen Falle aber negativ.

Diese Minutenzahl wird nun nach algebraischen Gesetzen von $48^{\circ} . 8' . 20''$. abgezogen, so hat man die geographische Breite des verlangten Nebenorts.

Zur Probe werde die anfangs §. 57. mühsam berechnete Breite vom Dorfe Hohenschäftlarn noch einmal vor die Hand genommen.

<i>Links.</i>	<i>Rechts.</i>
$\begin{array}{r} \text{Log. } k = 4.2691392 \\ \text{L. sin. } z = 0.6860267 - \text{I} \\ \hline 3.9551659 \\ 2 \\ \hline 7.9103318 \\ + 0.6724211 - \text{II} \\ \hline 0.5827529 - 3 = \text{L. } 0.003824 \\ \phantom{0.5827529 - 3 = \text{L. } } + 8.7467 \\ \hline \text{Log. } 8.7505 = 0.9420329 \\ \phantom{\text{Log. } } 0.0011537 \\ \hline 0.9431866 = \text{Log. } 8',7738 \\ \phantom{0.9431866 = \text{Log. } } 60 \\ \hline 46'' 380 \end{array}$	$\begin{array}{r} \text{Log. } k = 4.2691392 \\ \text{Log. cos. } z. = 0.9416791 - \text{I} \\ \phantom{\text{Log. cos. } } + 0.7310224 - 4 \\ \hline 0.9418407 = \text{Log. } 8,7467. \end{array}$
Also ist abzuziehen wie oben; $8' . 46'' . 4.$	I

§. 65.

Und noch ein Beispiel hierüber.

Welche geographische Breite hat das Schloss Harlaching,
dessen Azimuth von München aus beobachtet $14^{\circ} 22' 7''$
und die Entfernung 4977,5 Metres beträgt?

Auflös.

Links.

$$\begin{array}{r} \text{Log. } k = 3.6970113 \\ \text{Log. sin. } z = 0.3947304 - 1 \end{array}$$

$$4.0917417$$

2

$$8.1834834$$

$$0.6742584 = 11$$

$$0.8577418 - 3$$

$$\text{Log. } 0072068 \dots$$

Rechts.

$$\text{Log. } k = 3.6970113$$

$$\begin{array}{r} \text{Log. cos. } z = 0.9862054 - 1 \\ + 0.7310177 - 4 \end{array}$$

$$0.4142344$$

$$= \text{Log. } 2,59561$$

$$2,59561$$

$$0,00721$$

$$2,60282$$

$$\text{Log. } 2,60282 = 0.4154074$$

$$+ 0.0011536$$

$$0.4165610 = \text{Log. } 2,6096 \dots$$

60

$$36'' | 5760$$

$$48^{\circ} \quad 8' \quad 20''$$

$$- \quad 2' \quad 36'',57$$

$$48^{\circ} \quad 5' \quad 43'',43 \text{ Breite für Harlaching.}$$

§. 66.

*Auch ein Beispiel, wo das Azimuth zwischen 9° und 270° hinein-
fällt.*

Das Dorf *Obermenzing* ist von München 9116,8 Metres ent-
fernt, und hat zum Azimuth $111^\circ. 30'. 46''$; wie groß ist dessen
geographische Breite?

Links.

$$\begin{array}{r}
 \text{Log. } k = 3.9598424 \\
 \text{Log. sin. } z = 0.9686613 - 1 \\
 \hline
 3.9285037 \\
 2 \\
 \hline
 7.9570074 \\
 0.6724211 - 11 \\
 \hline
 0.5294285 - 3
 \end{array}$$

$$= \text{Log. } 0,00338$$

Rechts.

$$\begin{array}{r}
 \text{Log. } k = 3.9598424 \\
 \text{Log. cos. } z = 0.5641823 - 1 \\
 + 0.7310224 - 4 \\
 \hline
 0.2550471
 \end{array}$$

$$= \text{Log. } - 1,79906$$

$$\begin{array}{r}
 - 1,79906 \\
 + 0,00338 \\
 \hline
 - 1,79568
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \text{Log. } 1,79568 = 0.2542290 \\
 0.0011536 \\
 \hline
 0.2553826
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 0.2553826 = \text{Log. } - 1,8004 \\
 60 \\
 \hline
 48'' | 0240
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 48^{\circ} \quad 8' \quad 20'' \\
 - \quad \quad 1' \quad 48'' \\
 + \\
 \hline
 48^{\circ} \quad 10' \quad 8''
 \end{array}$$

Es ist also die geographische Breite vom Dorfe Obermenzing $48^{\circ} \quad 10' \quad 8''$.

§. 67.

Stellung der ursprünglichen Breiteformel für den Fall, wenn man die Erde für eine Kugel gelten lassen wollte.

Unter dieser Bedingung fällt in dem analytischen Ausdrucke

$$\text{Log.} \left\{ N \left\{ \begin{array}{l} 2 \left\{ \begin{array}{l} \text{Log. } \delta \\ \text{Log. sin. } z \end{array} \right\} \\ \text{Log. tang. } L \\ + 0,1626961 - 4 \end{array} \right\} + N \left\{ \begin{array}{l} \text{Log. } \delta \\ \text{Log. cos. } s \end{array} \right\} \right\} + L, (1 + e^2 \cos.^2 L)$$

die Grösse $(1 + e^2 \cos.^2 L)$ als Faktor völlig weg, weil $e=0$ ist.

Ferner kann für $\delta' = k \frac{(1 - \frac{1}{2} e^2 \sin.^2 L)}{a \sin. 1'}$ aus gleichem Grunde blofs

$\delta = \frac{k}{a \sin. 1'}$, gesetzt werden, wofür man durch die Logarithmisirung erhält:

$$\text{Log. } \delta' = \text{Log. } k + 0,7310226 - 4.$$

Obige Formel läuft demnach in diese zusammen:

$$N \left\{ \begin{array}{l} 2 \left\{ \begin{array}{l} \text{Log. } k \\ + 0.7310226 - 4 \end{array} \right\} \\ \text{Log. sin. } z \\ \text{Log. tang. } L \\ + 0.1626961 - 4 \end{array} \right\} + N \left\{ \begin{array}{l} \text{Log. } k \\ \text{Log. cos. } z \\ + 0.731022 - 4 \end{array} \right\}$$

Und durch gehörige Abkürzung in folgende:

$$N \left\{ \begin{array}{l} 2 \left\{ \begin{array}{l} \text{Log. } k \\ \text{Log. sin. } z \end{array} \right\} \\ \text{Log. tang. } L \\ + 0.6247413 - 11 \end{array} \right\} + N \left\{ \begin{array}{l} \text{Log. } k \\ \text{Log. cos. } z \\ + 0.7310226 - 4 \end{array} \right\}$$

Wollte man endlich diese Formel so einrichten, daß sie für alle Orte um München anwendbar wäre, dann dürfte auch noch $\text{Log. tang. } L = 0.0476802$ mit $0.6247413 - 11$ zusammen gezählt werden. Es käme dann heraus:

$$N \left\{ \begin{array}{l} 2 \left\{ \begin{array}{l} \text{Log. } k \\ \text{Log. sin. } z \end{array} \right\} \\ + 0.6724215 - 11 \end{array} \right\} + N \left\{ \begin{array}{l} \text{Log. } k \\ \text{Log. cos. } z \\ + 0.7310226 - 4 \end{array} \right\}$$

Man rechne nun mit Fleiß, welche Breite *Hobenschäftlarn* durch die letztere Formel bekäme, und wie weit sie vom obigen Resultat §. 57. und §. 64. abweichen würde.

$ \begin{array}{r} \text{Log. } k = 4.2691392 \\ \text{Log. sin. } z = 0.6860267 - I \\ \hline 3.9551659 \\ 2 \\ \hline 7.9103318 \\ + 0.6724215 - II \\ \hline 0.5827533 - 3 \\ \hline = \text{Log. } 0.003826 \end{array} $	$ \begin{array}{r} \text{Log. } k = 4.2691392 \\ \text{Log. cos. } z = 0.9416791 - I \\ + 0.7310226 - 4 \\ \hline 0.9418409 \\ = \text{Log. } 8.74663 \\ 0.00383 \\ \hline 8.75046 \\ 60 \\ \hline 45'' 02760 \end{array} $
--	--

48°.	8'.	20''.
	8'	45''
47°.	59''.	35''.

Es weicht also diese Antwort vom eigentlichen Resultate 47° 59' 33'',5 beinahe um 2 Sekunden ab.

§. 68.

Einrichtung der sphäroidischen Formel und der daraus abgeleiteten Regeln zur Berechnung der geographischen Breite umliegender Ortschaften für einen andern Hauptpunkt z. B. für Dachau.

Es braucht hier nichts weiter als die in der allgemeinen Formel vorkommenden Logarithmen für $(1 - \frac{1}{2} e^2 \sin^2 L)^2 = 2 \text{ Log. } (1 - \frac{1}{2} e^2 \sin^2 L)$, für $\text{tang. } L$ und für $(1 + e^2 \cos^2 L)$ ein- für allemal zu berechnen, und sie, wie bei *München* geschehen ist, mit den übrigen beständigen Logarithm zu verschmelzen, so wird aus der allgemeinen eine partikuläre Formel hervorgehen. *Dachau* hat nach Herrn Oberst *Bonne* zur geographischen Breite 48° 15' 35'',8.

$$\text{Log. tang. } L = 0.0495269.$$

Auflös.

$$\text{Log. sin. } L = 0.8728395 - 1 \quad \text{Log. cos. } L = 0.8233400 - 1$$

$$\begin{array}{r} \text{Log. } \frac{1}{2} e^2 = 0.4756029 - 3 \\ \hline 0.2212819 - 3 \end{array} \quad \begin{array}{r} \text{Log. } e^2 = 0.7766329 - 3 \\ \hline 0.4233129 - 3 \end{array}$$

$$= \text{Log. } 0.001665$$

$$= \text{Log. } 0.00265$$

$$\begin{array}{r} \text{I} \\ - 0.001665 \\ \hline 0.998334 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{I} \\ + 0.00265 \\ \hline 1.00265 \end{array}$$

$$\text{Log. } 0.998334 = 0.9992742 - 1 \quad \text{Log. } 1.00265 = 0.0011493.$$

$$\begin{array}{r} \text{I} \\ \hline 0.9985484 - 1 \end{array}$$

$$2 \text{ Log. } (1 - \frac{1}{2} e^2 \sin.^2 L) = 0.9985484 - 1$$

$$\text{Log. tang. } L = 0.0495269$$

$$0.6261831 - 11$$

$$\hline 0.6742548 - 11$$

Die Formel für die benachbarten Orte von *Dachau* spricht sich demnach so aus:

$$\text{Log. } \left\{ N \left\{ 2 \left\{ \begin{array}{l} \text{Log. } k \\ \text{Log. sin. } z \end{array} \right\} \right\} + N \left\{ \begin{array}{l} \text{Log. } k \\ \text{Log. cos. } z \end{array} \right\} \right\} + 0.0011493$$

$$\left(+ 0.6742584 - 11 \right) \left(+ 0.7310177 - 4 \right)$$

§. 69.

Anwendung hierüber.

Das Dorf Feldmoching ist von dem Marktflecken Dachau 8475,5 Metres entfernt, und hat von dem nämlichen Standpunkte aus $304^{\circ} 55' 13'',7$ zum Azimuth, welche geographische Breite hat Feldmoching, da Dachau selbst $48^{\circ} 15' 35'',8$ zählt?

$$\begin{array}{rcl}
 \text{Log. } k & = & 3.9281653 \\
 \text{Log. sin. } z & = & 0.9136885 - \text{I} \\
 \hline
 & & 3.8418538 \\
 & & 2 \\
 \hline
 & & 7.6837076 \\
 & + & 0.6742584 - \text{II} \\
 \hline
 & & 0.3579660 - 3 \\
 & = & \text{Log. } 0,00228 \\
 & & 2,61186 \\
 \hline
 & & \text{Log. } 2,61414 = 0.4163289 \\
 & & + 0.0011493 \\
 \hline
 & & 0.4174782 = \text{Log. } 2',615 \\
 & & \quad \quad \quad 60 \\
 & & \quad \quad \quad \hline
 & & \quad \quad \quad 36'' | 900
 \end{array}$$

$48^{\circ}.$	$15'.$	$35'',8$	
—	$2'.$	$36'',9$	
$48^{\circ}.$	$12'.$	$58'',9$	Breite von Feldmoching.

§. 70.

Ein anderer Nutzen der geographischen Azimuthe.

Sind von einem Standpunkte aus die Azimuthe zweier Ortschaften und die Entfernungen derselben bekannt, so läßt sich auch bestimmen, wie weit diese Ortschaften selbst von einander liegen. Denn wenn die Azimuthe z und Z , und ihre Distanzen vom gemeinschaftlichen Standpunkte d und D heissen, so ist

$$x = \sqrt{d^2 + D^2 - 2 d D \cos. (Z - z)}$$

B e w e i s.

Es sey C in Fig. 3. der gemeinschaftliche Standpunkt, A und B seyen die Ortschaften, folglich AC . und BC die Distanzen, m das Azimuth von A und $(m + n)$ das Azimuth von B . Daher

$$\begin{array}{rcl} m + n & = & Z \\ m & = & z \\ \hline n & = & Z - z. \end{array}$$

Zufolge der Trigonometrie ist nun in dem Dreiecke ABC

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2 - 2 AC. BC. \cos. n}$$

und wenn gehörig substituirt wird,

$$x = \sqrt{d^2 + D^2 - 2 d D \cos. (Z - z)}.$$

§. 71.

Eine Anwendung dieser brauchbaren Formel.

Das Schloß *Harlaching* ist von München 4977,4 und das Dorf *Neubausen* 3704 Metres entfernt. Das Azimuth von *Harlaching* aus

K

München ist $14^{\circ}. 22'. 7''$. und das von *Neubausen* aus dem nämlichen Standpunkte $119^{\circ}. 1'. 49''$. Wie weit ist Neuhausen von Harlaching entfernt?

Auflös. Hier ist $d = 3704$, $D = 4977,4$ und $Z - z = 119^{\circ}. 1'. 49'' - 14^{\circ}. 22'. 7'' = 104^{\circ}. 39'. 42''$. Sohin

$$x = \sqrt{3704^2 + 4977,4^2 - 2 \cdot 3704 \cdot 4977,4 \cos. 104^{\circ}. 39'. 42''}.$$

Das dritte Glied der Wurzelgrösse läßt sich am besten logarithmisch berechnen. Es wird, weil stumpfe Winkel negative Cosinusse haben, negativ ausfallen, folglich wegen dem Minuszeichen positiv werden.

$$\text{Log. } 2 = 0. 3010300$$

$$\text{Log. } 3704 = 3. 5686710$$

$$\text{Log. } 4977,4 = 3. 6970025$$

$$\text{Log. cos. } 104^{\circ}. 39'. 42'' = 0. 4034438 - 1$$

$$6. 9701473 = \text{Log. } 9335710.$$

$$\text{Nun ist } 3704^2 = 13719616$$

$$4977,4^2 = 24774550,76$$

$$+ 9335710$$

$$\hline 47|82|98|36,76 \quad | \quad 6915,9$$

$$36$$

$$\hline 1182$$

$$129$$

$$\hline 1161$$

$$2198$$

$$\hline 1381$$

$$81736$$

$$13825$$

$$\hline 69125$$

$$\hline 1261176$$

$$13830$$

Es ist demnach die Entfernung des Schlosses Harlaching vom Dorfe Neuhausen allernächstens 6916 Metres, welche gemäß meiner Formel: $\text{Log. b. Sch.} = \text{Log. n Metres.} + 0.5348266$, etwas über 23696 baierische Schuh auswerfen. *)

*) Um meinen Lesern Rechenschaft von der Ableitung dieser Formel zu geben, diene folgender Kalkul. Der Metre ist der zehnmillionste Theil vom Quadranten eines Mittagkreises der Erde. Ein solcher Quadrant hält aber 30784440 Pariserfuß, wovon 12038 eine Länge geben, die 14400 baierischen Schuhen gleich kömmt. Ich mache nun diesen Ansatz:

Baierische Schuh?	n Metres.
1	$\frac{1}{10000000}$ Quadranten.
1	30784440 Pariserfuß.
12038	14400 baierische Schuh.
10000000	

$$\text{Log. } 3078444 = 6.4883312$$

$$\text{Log. } 14400 = 4.1583625$$

$$10.6466937$$

$$\text{Log. } 12038000000 = 10.1118671$$

$$0.5348266$$

Folglich $\text{Log. n' baierische Schuh.} = \text{Log. n Metres} + 0.5348266$. Und wechselsweise

$$\text{Log. n Metres.} = \text{Log. n baierische Schuh.} - 0.5348266.$$

§. 72.

Was muß diese Distanz zwischen Harlaching und Neuhausen auf der Mannertschen Karte betragen? Eine Frage zur Prüfung dieser Karte vorgelegt.

Da alle Linien auf der Mannertschen Karte nach §. 17. 12mal kleiner als die auf der neuen topographischen Karte von Baiern sind, und da letztere schon die Linien in der Natur 50000mal verjüngt; so folgt daraus, daß die Mannertsche Karte jede Distanz, die nicht zu weit vom mittelsten Meridian entfernt ist, 600000mal kleiner angiebt, als sie wirklich ist. Man mache demnach die so eben gefundenen 23696 baierische Schuhe zu Linien, und dividire durch 600000.

$$\begin{array}{r}
 23696 \\
 \underline{144} \\
 94784 \\
 94784 \\
 \underline{23696} \\
 3412224 - \quad 5\frac{2}{3} \text{ Linien.} \\
 600000 \\
 \underline{30} \\
 4
 \end{array}$$

oder 5 Linien und 8 Scrupel nebst einem unfühlbaren Ueberschusse.

Nimmt man diese Länge auf dem baierischen Maafsstabe mit dem Handzirkel, so kann man bei Anschlagung desselben auf der Karte so ziemlich zufrieden seyn.

§. 73.

Bestimmung des Azimuths eines Nebenorts in Bezug auf das Hauptort.

Es kann Fälle geben, wo man aus dem Azimuthe eines Ortes in Bezug auf den Standpunkt gerne erfahren möchte, was der Standpunkt selbst für ein Azimuth in Bezug auf das Nebenort habe. Vorausgesetzt, daß die Distanz der beiden Punkte gegeben sey. Man weiß z. B. daß *Hobenschäftlarn* aus *München* beobachtet ein Azimuth von $29^{\circ} 2'$ habe, und daß die Entfernung dieses Dorfes von München 18584 Metres betrage. Nun bilde ich mir ein, *Hohenschäftlarn* sey der Beobachtungs-Ort; es soll gefunden werden, was München für ein Azimuth in Bezug auf *Hohenschäftlarn* habe. Dazu dient die Formel des Herrn *Legendre*:

$$z' = 180 + z - (\delta \sin. z \tan. L' - 0,25 \delta \sin. \delta \sin. 2 z),$$
 wobei zu bemerken kömmt, daß wenn $z > 180$ ist, das erste Glied $\delta \sin. z \tan. L$ einen negativen Werth hat. Das zweite Glied $- 0,25 \delta \sin. \delta \sin. 2 z$ wird hingegen positiv, wenn $z > 90$ und < 180 ; weil da die doppelten Bögen zwischen 180° und 360° hineinfallen, wo die Sinusse negativ sind. Für $z = 90^{\circ}$ selbst wandelt sich die Formel in diese um:

$$z' = 270 - \delta \tan. L'.$$

Für $z = 180^{\circ}$ ist $z' = 360^{\circ}$ oder $= 0^{\circ}$, und für $z = 270^{\circ}$ muß $z' = 180^{\circ} + 270^{\circ} + \delta \tan. L' = 90 + \delta \tan. L'$ seyn. Hingegen für $z = 0$ ist $z' = 180$.

Führt man wieder statt $\sin. \delta$ den Faktor $\frac{\delta \pi}{10800}$ ein, so kann im zweiten Gliede der zweiten Einklammerung substituirt werden;

$$\frac{0,25 \delta^2 \pi \sin. 2 z}{10800} = \frac{0,25 \pi}{10800} \delta^2 \sin.^2 z.$$

Man suche für den gebrochenen Koefficienten den beständigen Logarithm auf folgende Art:

$$\text{Log. } 0,25 = 0.3979400 - 1$$

$$\text{Log. } \pi = 0.4971499$$

$$0.8950899 - 1$$

$$\text{Log. } 10800 = 4.0334238$$

$$0.8616661 - 5$$

Es läßt sich also das, was von $(180 + z)$ abzuziehen kömmt, logarithmisch so vorstellen:

$$N \left\{ \begin{array}{l} \text{Log. } \delta \\ \text{Log. sin. } z \\ \text{Log. tang. } L \end{array} \right\} + N \left\{ \begin{array}{l} 2 \text{ Log. } \delta \\ \text{Log. sin. } 2 z \\ + 0.8616661 - 5 \end{array} \right\}$$

§. 74.

Anwendung hierüber.

Welches Azimuth hat München aus Hohenschäftlarn beobachtet?

Die Data hiezu sind schon bekannt;

denn $\delta' =$ ist $10', 0'', 2226$ und $\text{Log. } \delta' = 1.0001619$. $z = 29^\circ$

$2', L' = 47^\circ 59' 33'', 5$.

*Auflös.**Links.*

$$\begin{aligned}\text{Log. } \delta &= 1.0001619 \\ \text{Log. sin. } z &= 0.6860267 - 1 \\ \text{Log. tang. ' } &= 0.0454439\end{aligned}$$

$$0.7316325$$

$$= \text{Log. } 5.3954$$

$$5.39054$$

$$- 0.00618$$

$$5.38436$$

$$60$$

$$23' | 06160$$

$$180^\circ$$

$$z =$$

$$29^\circ$$

$$2'$$

$$209^\circ$$

$$2'$$

$$0^\circ$$

$$5'$$

$$23''$$

$$z' =$$

$$208^\circ$$

$$56'$$

$$36''.$$

Rechts.

$$\text{Log. } \delta = 1.0001919$$

$$2$$

$$2.0003238$$

$$\text{Log. sin. } 2z = 0.9287410 - 1$$

$$0.8616661 - 5$$

$$0.7907309 - 3$$

$$\text{Log. } 0.006176$$

§. 75.

Ummodelung der Formel zur Bestimmung des Azimuths für den Fall, wenn δ nicht bekannt ist.

Weil, wie schon öfter erinnert worden, $\text{Log. } \delta = \text{Log. } k L (1 - \frac{1}{2} e^2 \sin.^2 L) + 0.7317435 - 4$ ist, so gilt folgende Substitution:

$$N \left\{ \begin{array}{l} \text{Log. } k \\ \text{Log. } (1 - \frac{1}{2} e^2 \sin.^2 L) \\ \text{Log. sin. } z. \\ \text{Log. tang. } L' \\ + 0.7317435 - 4. \end{array} \right\} - N \left\{ \begin{array}{l} \text{Log. } k \\ \text{Log. } (1 - \frac{1}{2} e^2 \sin.^2 L) \\ \text{Log. sin. } 2 z \\ + 0.3451531 - 11. \end{array} \right\}$$

Soll das Azimuth eines Standpunkts für mehrere umliegende Ortschaften ausgemittelt werden, dann läßt sich der Logarithm von $(1 - \frac{1}{2} e^2 \sin.^2 L)$ ein für allemal berechnen, und mit den beiden übrigen in eine Summe bringen. Um z. B. das Azimuth von München, aus den umliegenden Ortschaften beobachtet, zu bestimmen, darf nur für L $(1 - \frac{1}{2} e^2 \sin.^2 L) = 0.9992789 - 1$ ein für allemal substituiert werden. Es geht dann hervor

$$N \left\{ \begin{array}{l} \text{Log. } k \\ + 0.9992789 - 1 \\ \text{Log. sin. } z \\ \text{Log. tang. } L' \\ + 0.7317435 - 4 \end{array} \right\} - N \left\{ \begin{array}{l} 2 \text{ Log. } k \\ + 0.9985578 - 1 \\ \text{Log. sin. } 2 z \\ + 0.3451531 - 11 \end{array} \right\}$$

Und nach der Abkürzung:

$$N \left\{ \begin{array}{l} \text{Log. } k \\ \text{Log. sin. } z \\ \text{Log. tang. } L \\ 0.7310224 - 4 \end{array} \right\} - N \left\{ \begin{array}{l} 2 \text{ Log. } k \\ \text{Log. sin. } 2 z \\ 0.3437109 - 11. \end{array} \right\}$$

§. 76.

A n w e n d u n g.

Welches Azimuth hat München aus dem Schlosse Harlaching beobachtet?

Auflös. Die Data hiezu sind:

$$k = 4977,5 \text{ Metres}$$

$$L' = 48^\circ. 5'. 43''.$$

$$z = 14^\circ. 22'. 7''.$$

Links.

$$\text{Log. } k = 3.6970113$$

$$\text{Log. sin. } z = 0.3946811 - 1$$

$$\text{Log. tang. } L' = 0.0470163$$

$$+ 0.7310224 - 4$$

$$0.8697311 - 1$$

$$= \text{Log. } 0,74085 \dots$$

Rechts.

$$\text{Log. } k = 3.6970110$$

2

$$7.3940226$$

$$\text{Log. sin. } 2z = 0.6819623 - 1$$

$$+ 0.3437109 - 11$$

$$0.4196952 - 4$$

$$= \text{Log. } 0,00026 \dots$$

$$0.74085$$

$$- 0,00026$$

$$0,74058$$

$$60$$

$$44,4348$$

$$180^\circ$$

$$z = 14^\circ. 22'. 7''.$$

$$194^\circ. 22'. 7.$$

$$44'',9$$

$$194^\circ. 21'. 22,5 \dots$$

das Azimuth von München aus Harlaching beobachtet.

L

 §. 77.

Die geographische Länge eines Orts aus dem Azimuthe und aus der Entfernung desselben vom Standpunkte des Beobachters zu bestimmen, vorausgesetzt, dass dessen geographische Breite bekannt ist.

Zur allgemeinen Lösung dieses Problems traf ich sowohl in dem oben §. 55. angeführten Werke des *Delambre* als in den instruktiven Aufsätzen des hiesigen topographischen Büreaus die Formel an $M' = M + \frac{\delta \sin. z}{\cos. L'}$, wo M die geographische Länge des Standpunkts, M' die zu suchende Länge des befraglichen Orts, L' die Breite des letztern, δ die Anzahl der Minuten vom terrestrischen Zwischenbogen, und z das Azimuth bedeutet.

Allein das Zeichen $+$ ist ein Druckfehler, und muß $-$ heissen; denn gesetzt, ein Ort habe 90° Azimuth, so liegt es sehr begreiflich gegen Westen. Oerter aber, die gegen Westen liegen, haben eine kleinere geographische Länge als der Ort der Beobachtung, folglich muß $\frac{\delta}{\cos. L'}$, von M subtrahirt werden. Die eigentliche Formel sieht demnach so aus $M' = M - \frac{\delta \sin. z}{\cos. L'}$, und nach dieser Vorschrift werden die geographischen Längen zu der grossen Karte von Baiern im obbemeldten Büreau auch wirklich berechnet.

Für $z = 0^\circ$ ist auch $\frac{\delta \sin. z}{\cos. L'} = 0$, das heisst: hat ein Nebenort in Bezug auf den Beobachtungsort kein Azimuth, so ist dessen geo-

graphische Länge die nämliche, wie die des Beobachtungsorts seine; weil beide Oerter in einerlei Mittagkreise liegen.

Für $z = 180^\circ$ gilt eben dasselbe, indem $\sin. 180^\circ = 0$ ist. Wächst z zu 270° an, dann wird $\sin. 270^\circ = -1$, daher $M' = M + \frac{\delta \sin. z}{\cos. L'}$; weil das Ort gegen Ost liegt, und also eine grössere Länge hat als der Ort der Beobachtung.

§. 78.

Eine Anwendung hierüber.

Welche geographische Länge hat das Dorf Hohenschäftlarn?

Die Data hierzu finden sich §. 57, wo dessen geographische Breite berechnet worden. Es ist nämlich

$$Z = 29^\circ \quad 2'$$

$$\delta = 10', \quad 0'', 2226.$$

$$L' = 47^\circ \quad 59' \quad 33''.$$

$$\text{Ferner ist } M = 29^\circ \quad 16' \quad 14''.$$

Auflösung. $\text{Log. } \delta = 1, 0001619$

$$\text{Log. sin. } z = 0, 6860267 - 1$$

$$0, 6861886$$

$$\text{Log. cos. } L' = 0, 8255880 - 1$$

$$0, 8606006 = \text{Log. } 7,2545$$

$$15|2700$$

L 2

$$\begin{array}{r} M = 29^{\circ}. \quad 16'. \quad 14''. \\ - \qquad \qquad 7' \quad 15'',27 \\ \hline 29^{\circ}. \quad 8'. \quad 58'',72 \end{array}$$

geographische Länge von Hohen-
schäftlarn.

17. 18. 19. 20. 21. 22. 23. 24. 25. 26. 27. 28. 29. 30. 31. 32. 33. 34. 35. 36. 37. 38. 39. 40. 41. 42. 43. 44. 45. 46. 47. 48. 49. 50. 51. 52. 53. 54. 55. 56. 57. 58. 59. 60. 61. 62. 63. 64. 65. 66. 67. 68. 69. 70. 71. 72. 73. 74. 75. 76. 77. 78. 79. 80. 81. 82. 83. 84. 85. 86. 87. 88. 89. 90. 91. 92. 93. 94. 95. 96. 97. 98. 99. 100. 101. 102. 103. 104. 105. 106. 107. 108. 109. 110. 111. 112. 113. 114. 115. 116. 117. 118. 119. 120. 121. 122. 123. 124. 125. 126. 127. 128. 129. 130. 131. 132. 133. 134. 135. 136. 137. 138. 139. 140. 141. 142. 143. 144. 145. 146. 147. 148. 149. 150. 151. 152. 153. 154. 155. 156. 157. 158. 159. 160. 161. 162. 163. 164. 165. 166. 167. 168. 169. 170. 171. 172. 173. 174. 175. 176. 177. 178. 179. 180. 181. 182. 183. 184. 185. 186. 187. 188. 189. 190. 191. 192. 193. 194. 195. 196. 197. 198. 199. 200. 201. 202. 203. 204. 205. 206. 207. 208. 209. 210. 211. 212. 213. 214. 215. 216. 217. 218. 219. 220. 221. 222. 223. 224. 225. 226. 227. 228. 229. 230. 231. 232. 233. 234. 235. 236. 237. 238. 239. 240. 241. 242. 243. 244. 245. 246. 247. 248. 249. 250. 251. 252. 253. 254. 255. 256. 257. 258. 259. 260. 261. 262. 263. 264. 265. 266. 267. 268. 269. 270. 271. 272. 273. 274. 275. 276. 277. 278. 279. 280. 281. 282. 283. 284. 285. 286. 287. 288. 289. 290. 291. 292. 293. 294. 295. 296. 297. 298. 299. 300. 301. 302. 303. 304. 305. 306. 307. 308. 309. 310. 311. 312. 313. 314. 315. 316. 317. 318. 319. 320. 321. 322. 323. 324. 325. 326. 327. 328. 329. 330. 331. 332. 333. 334. 335. 336. 337. 338. 339. 340. 341. 342. 343. 344. 345. 346. 347. 348. 349. 350. 351. 352. 353. 354. 355. 356. 357. 358. 359. 360. 361. 362. 363. 364. 365. 366. 367. 368. 369. 370. 371. 372. 373. 374. 375. 376. 377. 378. 379. 380. 381. 382. 383. 384. 385. 386. 387. 388. 389. 390. 391. 392. 393. 394. 395. 396. 397. 398. 399. 400. 401. 402. 403. 404. 405. 406. 407. 408. 409. 410. 411. 412. 413. 414. 415. 416. 417. 418. 419. 420. 421. 422. 423. 424. 425. 426. 427. 428. 429. 430. 431. 432. 433. 434. 435. 436. 437. 438. 439. 440. 441. 442. 443. 444. 445. 446. 447. 448. 449. 450. 451. 452. 453. 454. 455. 456. 457. 458. 459. 460. 461. 462. 463. 464. 465. 466. 467. 468. 469. 470. 471. 472. 473. 474. 475. 476. 477. 478. 479. 480. 481. 482. 483. 484. 485. 486. 487. 488. 489. 490. 491. 492. 493. 494. 495. 496. 497. 498. 499. 500. 501. 502. 503. 504. 505. 506. 507. 508. 509. 510. 511. 512. 513. 514. 515. 516. 517. 518. 519. 520. 521. 522. 523. 524. 525. 526. 527. 528. 529. 530. 531. 532. 533. 534. 535. 536. 537. 538. 539. 540. 541. 542. 543. 544. 545. 546. 547. 548. 549. 550. 551. 552. 553. 554. 555. 556. 557. 558. 559. 560. 561. 562. 563. 564. 565. 566. 567. 568. 569. 570. 571. 572. 573. 574. 575. 576. 577. 578. 579. 580. 581. 582. 583. 584. 585. 586. 587. 588. 589. 590. 591. 592. 593. 594. 595. 596. 597. 598. 599. 600. 601. 602. 603. 604. 605. 606. 607. 608. 609. 610. 611. 612. 613. 614. 615. 616. 617. 618. 619. 620. 621. 622. 623. 624. 625. 626. 627. 628. 629. 630. 631. 632. 633. 634. 635. 636. 637. 638. 639. 640. 641. 642. 643. 644. 645. 646. 647. 648. 649. 650. 651. 652. 653. 654. 655. 656. 657. 658. 659. 660. 661. 662. 663. 664. 665. 666. 667. 668. 669. 670. 671. 672. 673. 674. 675. 676. 677. 678. 679. 680. 681. 682. 683. 684. 685. 686. 687. 688. 689. 690. 691. 692. 693. 694. 695. 696. 697. 698. 699. 700. 701. 702. 703. 704. 705. 706. 707. 708. 709. 710. 711. 712. 713. 714. 715. 716. 717. 718. 719. 720. 721. 722. 723. 724. 725. 726. 727. 728. 729. 730. 731. 732. 733. 734. 735. 736. 737. 738. 739. 740. 741. 742. 743. 744. 745. 746. 747. 748. 749. 750. 751. 752. 753. 754. 755. 756. 757. 758. 759. 760. 761. 762. 763. 764. 765. 766. 767. 768. 769. 770. 771. 772. 773. 774. 775. 776. 777. 778. 779. 780. 781. 782. 783. 784. 785. 786. 787. 788. 789. 790. 791. 792. 793. 794. 795. 796. 797. 798. 799. 800. 801. 802. 803. 804. 805. 806. 807. 808. 809. 810. 811. 812. 813. 814. 815. 816. 817. 818. 819. 820. 821. 822. 823. 824. 825. 826. 827. 828. 829. 830. 831. 832. 833. 834. 835. 836. 837. 838. 839. 840. 841. 842. 843. 844. 845. 846. 847. 848. 849. 850. 851. 85

Ummodelung der Formel für den Fall, wo s nicht bekannt ist.

Es darf hier nur in Erinnerung gebracht werden, daß $\text{Log. } \delta = \text{Log. } k + \text{Log. } (1 - \frac{1}{2} e^2 \sin.^2 L) + 0,7317435 - 4$ sey. Der Logarithm jener Minutenzahl, welche nach Maaßgabe des Azimuths entweder zu der geographischen Länge addirt oder von ihr abgezogen werden muß, kann demnach so vorgestellt werden:

$$\text{Log. } x = \left\{ \begin{array}{l} \text{Log. } k \\ \text{Log. } (1 - \frac{1}{2} e^2 \sin.^2 L \\ \text{Log. } \sin. z \\ + 0.7317435 - 4 \end{array} \right\} + \text{Log. } \cos. L'$$

Anwendung dieser kleinen Formel.

Welche geographische Länge hat das Dorf Feldmoching, welches von Dachau 8475,5 Metres entfernt ist, und von diesem Flecken aus $304^{\circ}. 55'. 13'', 7$ Azimuth zählt. Die geographische Breite von Dachau ist $48^{\circ}. 15'. 35'', 8$. und die von Feldmoching $48^{\circ}. 12'. 58'', 5$.

Auflös. $\text{Log. sin. } L = 0.8728495 - 1$

o. 7456990 — I

Log. $\frac{1}{2} e^2$ o. 4756029 — 3

$$0.2213019 - 3 = \text{Log. } 0.0016646$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ - 0,001665 \\ \hline 0,998335 \end{array}$$

$$\text{Log. } (1 - \frac{1}{2} e^2 \sin.^2 L) = 0,9992762 - 1$$

$$\text{Log. } k = 3,9281653$$

$$\text{Log. } \sin. z = 0,9136885 - 1$$

$$+ 0,7317405 - 4$$

$$\hline 0,5728735$$

$$\text{Log. } \cos. L' = 0,8237255 - 1$$

$$- \quad \quad \quad +$$

$$\hline 0,7491480 = \text{Log. } 5',6124$$

60

36''|7440

Da nun das Azimuth 304° einen negativen Sinus hat, so muß diese Zahl $5'.36,7$ zur Länge von Dachau addirt werden; weil Feldmoching östlicher als Dachau liegt, folglich eine grössere Länge hat.

$$\begin{array}{r} M = 29^\circ \quad 16' \quad 14'' \\ + \quad \quad \quad 5' \quad 36,7 \\ \hline \end{array}$$

$29^\circ. \quad 21'. \quad 50'',7$ die geographische Länge von Feldmoching.

§. 81.

Die Formel so zu stellen, daß die geographische Länge von einer Menge Ortschaften, die um einen Haupt-Stand-Punkt herumliegen, z. B. um München, leicht bestimmt werden kann.

Es hat hier nichts weiter nöthig, als den beständigen Logarithm der Grösse $(1 - \frac{1}{2} e^2 \sin.^2 L)$ mit $0,7317435 - 4$ zu verschmelzen. Für München ist er bekanntlich $0,9992789 - 1$.

$$\text{Daher } 0,9992789 - 1$$

$$0,7317435 = 4$$

$$0,7310224 - 4$$

Es entsteht demnach.

$$\text{Log. } x = \left\{ \begin{array}{l} \text{Log. } k \\ \text{Log. sin. } z \\ + 0,7310224 - 4. \end{array} \right\} + \text{Log. cos. } L'.$$

§. 82.

Anwendung hierüber.

Welche geographische Länge hat das Dorf Planeck, das von München 10631,9 Metres entfernt ist, und das zum Azimuth $70^\circ 0' 40''$ hat. Seine Breite ist $48^\circ 6' 22'',3$ befunden worden. Münchens Länge beträgt bekanntlich $29^\circ 16' 14''$.

Auflös. $\text{Log. } k = 4,0264048$

$$\text{Log. sin. } z = 0,9730165 - 1$$

$$+ 0,7310224 - 4$$

$$0,7304437$$

$$\text{Log. cos. } L' = 0,8246260 - 1$$

$$0,9058177 = \text{Log. } 8',0504$$

$$\frac{60}{3''10240}$$

$$\begin{array}{r} 29^{\circ}. \quad 16'. \quad 14''. \\ - \quad 0^{\circ}. \quad 8'. \quad 3''. \\ \hline \end{array}$$

29°. 8'. 11''. geographische Länge von Planeck.

§. 83.

Aus dem Meilenmaafse einer gegebenen Landkarte die Verjüngung derselben zu bestimmen.

1. Man drücke die geographische Meile in solchen Schuhen aus, wovon man einen gutgetheilten Maaßstab besitzt, z. B. in baierischen, von welchen man weiß, daß 25380 auf besagte Meile gehen.

2. Diese Anzahl Schuhe mache man zu Skrupel, vorausgesetzt, daß der Maaßstab Skrupel anzugeben im Stande ist. Man erhält in unserm Fall $25380 \times 12 \times 12 \times 12 = 43856640$ Skrupel.

3. Man fasse das auf der Karte befindliche Meilenmaafs mit dem Handzirkel auf, drücke es in Skrupel aus, und dividire damit in die eben gefundene Zahl, so zeigt der Quotient an, um wie vielmal kleiner die Linien auf der Karte, als die Linien in der Natur sind.

4. Nimmt man dabei auf das Zusammenziehen des Papiers durch das Netzen und Tröcknen Rücksicht, dann wird das Resultat der Wahrheit noch mehr angenähert. Man weiß aber aus Erfahrung, daß sich das Papier, wenn es nicht sonderlich dick ist, ungefähr um $\frac{1}{136}$ in der Länge und um $\frac{1}{70}$ in der Breite zusammenzieht. Hält demnach der Maaßstab auf der Karte, der gewöhnlich nach der Breite des Papiers aufgetragen wird, n Skrupel, so nenne man die Anzahl der Skrupel vor der Zusammenziehung = x und man bekommt die Gleichung:

$$x - \frac{x}{70} = n$$

$$\begin{array}{l} \times 70 \\ \text{abgek.} \end{array} \quad \begin{array}{l} 70x - x \\ 69x \end{array} = \begin{array}{l} 70n \\ 70n \end{array}$$

$$69: \quad x = \frac{70n}{69}$$

Man muß also die gefundenen Skrupel eines Meilenmaasses durch 70 multiplizieren und das Produkt durch 69 dividiren, so hat man den Divisor. Noch genauer verfährt man, wenn die Anzahl der Skrupel N , die auf die wirkliche Meile gehen, durch den Bruch $\frac{70n}{69}$ dividirt wird, d. i.: $N: \frac{70n}{69} = \frac{N}{1} \times \frac{96}{70n} = \frac{69N}{70n}$.

§. 84.

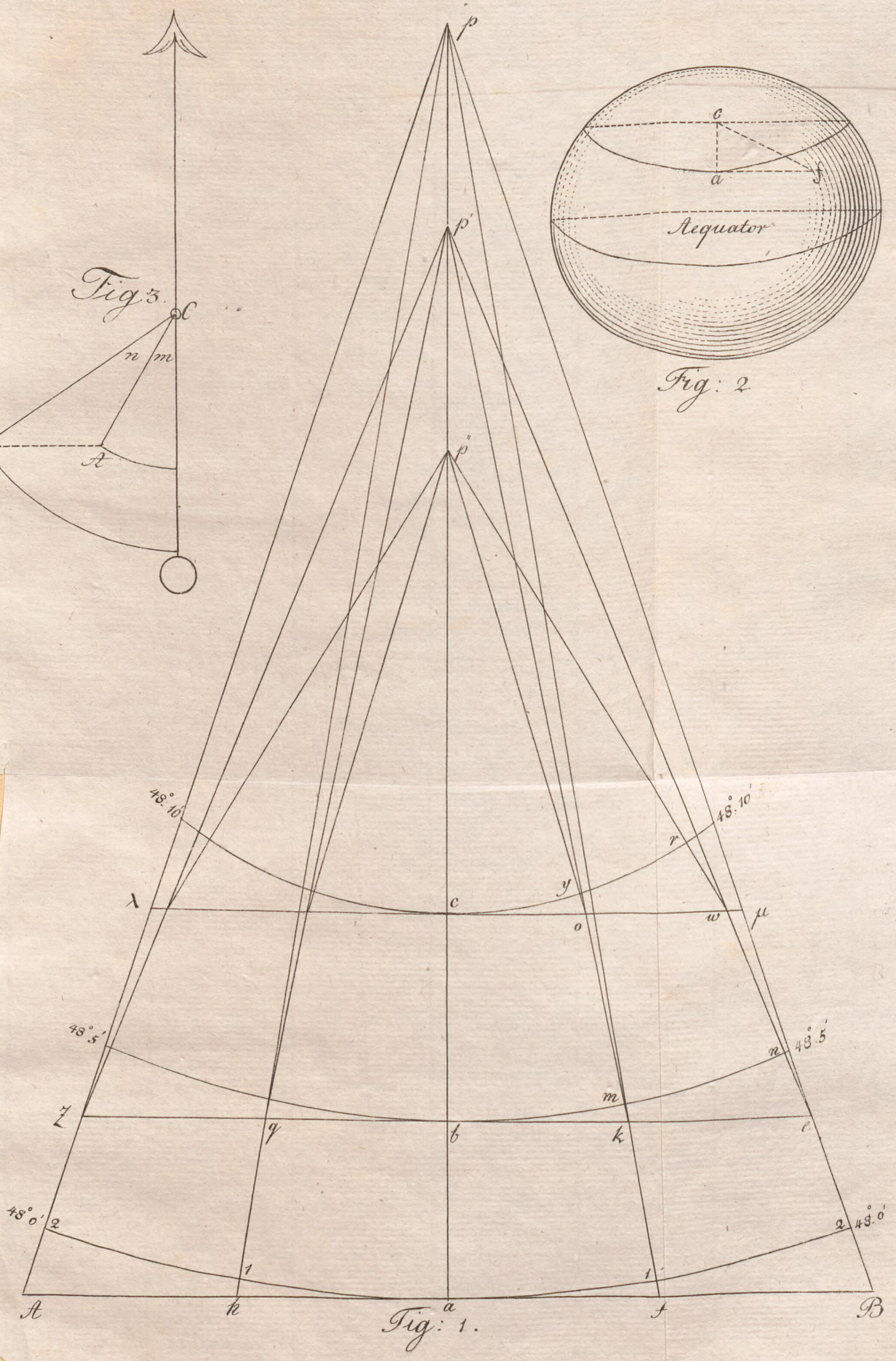
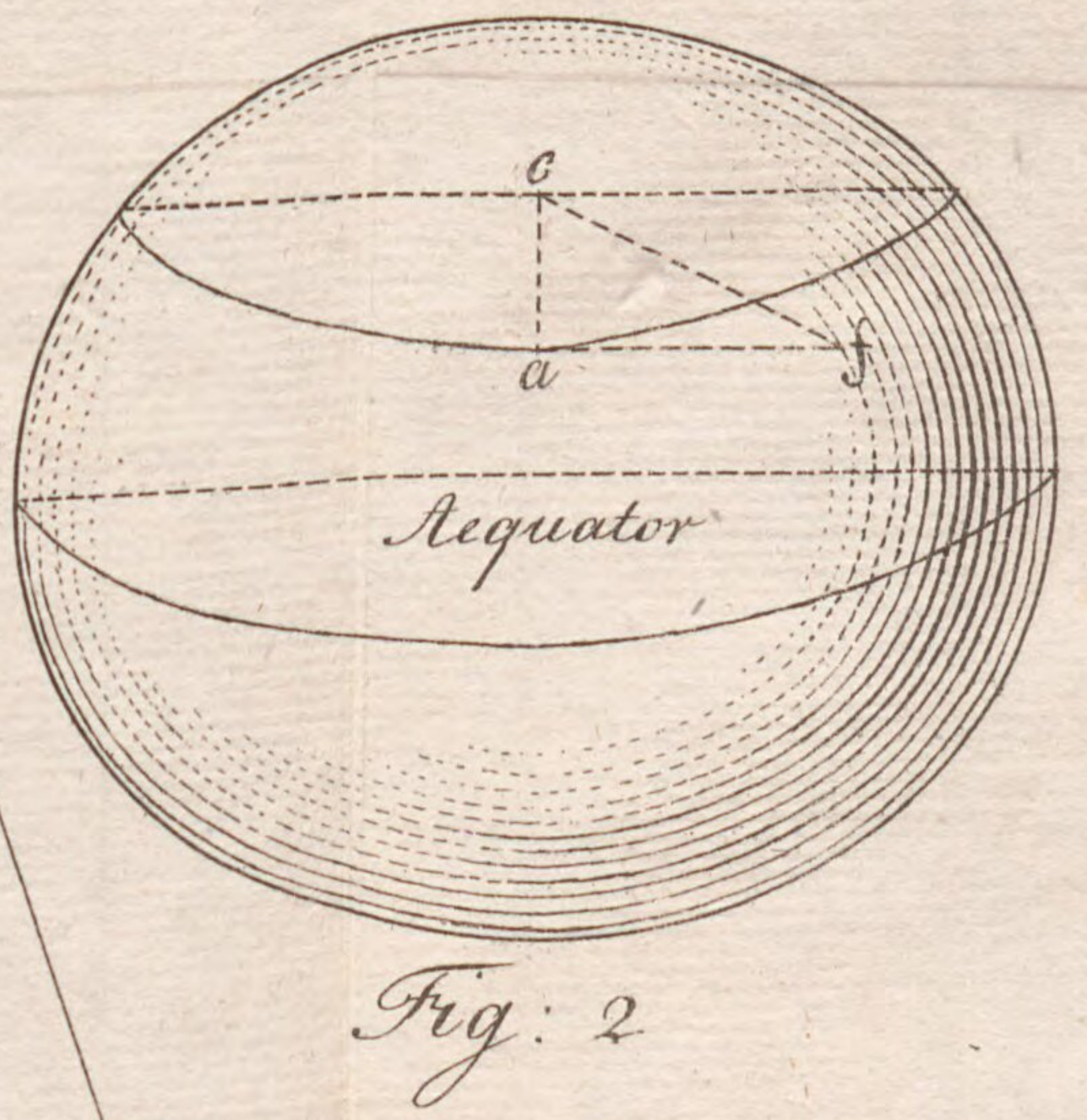
Eine Anwendung hierüber.

Auf der öfter erwähnten Mannert'schen Karte des Königreichs Baiern finde ich die Meile auf den beigefügten Maassstab $6\frac{1}{12}$ Linien oder 73 Skrupel groß; wie vielmal sind hier die Distanzen verjüngt?

B e r e c h n u n g.

$$x = \frac{96 \times 43856640}{70 \times 72} = \frac{3026108160}{5040} = 600418 \text{ mal, welches}$$

von dem obigen §. 17. herausgebrachten Resultate nicht viel abweicht.



70
der
Sk
70
6

A

v
w

man die Anzahl der Skrupel vor der Zusammenziehung = x und
man bekümmert die Gleichung:

Prändel, Johann Georg,

J[ohann] G[eorg] Prändl's Mathematische Anweisung, Landkarten nach den
Gesetzen der Sphäroidik anzulegen und zu beurtheilen

München 1810

4 Math.a. 227

urn:nbn:de:bvb:12-bsb10053038-7